Grundriß

der gesammten

theoretischen Astronomie

mit einem Anhange

über den Kalender.

Nebst vorausgeschickter Theorie der Kegelschnitte und einiger Curven höherer Ordnung.

Zum Gebrauche der Vorlesungen

von

Johann Schön

der Philosophie Doctor, öffentl. und ordentl. Professor der Mathematik an der Universität zu Würzburg.

Nürnberg,

bey Carl Felßecker.

1811.

4. M. 103.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Die Astronomie ist ohne Zweifel die Krone der angewandten Mathematik, man mag sie entweder als Bürgen der Größe des menschlichen Geistes betrachten, oder den großen Nutzen berücksichtigen, welcher aus ihr für die Bewohner unseres Planeten in mannichfaltigster Beziehung fließt.

Wie erhaben muß uns der Mensch, von dem Ovid singt:

> Finxit in effigiem moderantum cuncta deorum;
> Pronaque cum spectent animalia caetera terram,
> Os homini sublime dedit, coelumque tueri
> Jussit, et erectos ad sidera vultus. *Met. I.* 83.

erscheinen, wenn wir die schöne Ordnung in Erwägung ziehen, in welche er das ungeheure Heer von leuchtenden und schimmernden Scheiben und Punkten über unserem Haupte, wenn gleich nur im Fortgange mehrerer Jahrtausende, zu bringen wußte! Sein nach Auffindung des Kausalzusammenhanges unaufhaltsam strebender Geist ist es, welcher nicht mit einer blosen Geschichte und Klassifikation der himmlischen Erscheinungen zufrieden, sondern gleichsam in das Heiligthum der schöpferischen Gottheit vordringend auch die Ursache dieser Erscheinungen, die Regelmäßigkeit und Stabilität des Universums, als des Inbegriffes von Milliarden Welten, zu ergründen bemüht war. Wie viel der Sohn der Erde von diesem des Weltalls Pünktchen aus durch die Macht sei-

ner Vernunft, dieses heil'gen Götterfunkens, leistete, dieß, o Jüngling! zu einer höheren Bildung den Musen geweiht, soll dir der vorliegende Grundriß zur Uebersicht bringen, gewährend zugleich die deutliche Einsicht in die Art, wie der Mensch das scheinbar Unmögliche zu leisten im Stande war. Möchte Virgil's Entschluß,

Me vero primum dulces ante omnia Musae,
Quarum sacra fero, ingenti perculsus amore,
Accipiant; coelique vias et sidera monstrent,
Defectus Solis varios, lunaeque labores;
Unde tremor terris; qua vi maria alta tumescant
Obicibus ruptis, rursusque in se ipsa residant;
Quid tantum Oceano properent se tingere soles
Hiberni, vel quae tardis mora noctibus obstet....
Felix, qui potuit rerum cognoscere causas! Georg. II., 475.

auch der deine seyn, und dich Plato's Zuruf: „*Nolitae ignorare, Astronomiam sapientissimum quiddam esse*" befeuern!

Wenn also Urania schon durch solche innere Reitze einladet, uns der Feßeln des Irrdischen zu entschlagen, um ihr mit reinem Gemüthe zu huldigen; so sind fürwahr die Vortheile, welche die Menschheit aus der Sternkunde schöpft, gleich äußeren Reitzen nur als lockender Zusatz zu betrachten. Ohne Astronomie keine, oder frevelhafte und nutzlose Beschiffung der Meere, — keine Weltumseglung, und ohne diese keine Kenntniß unseres Planeten! Dieser würde dann nur getrennte Theile eines schönen, von uns höchstens nur geahndeten, Ganzen darstellen, dem wir etwa mit Leuzipp die Gestalt einer Walze, oder mit Demokrit die Figur eines Kahnes geben würden. Ohne

Astro-

Astronomie keine umfassende Kenntniß der Völker der Erde; keine Geschichte der Menschheit! Nur durch enge Grenzsteine bezeichneter Handelsverkehr, und Beschränkung der menschlichen Kräfte! Ohne Astronomie keine genauen Ländercharten; so gut als keine Chronologie und keine Gnomonik!

Die Kenntniß der Triebräder des Weltgebäudes und ihrer Gesetze zernichtet Vorurtheile, die den Wilden und Barbaren beben machen, wenn er die Sonne verfinstert, oder den Mond plötzlich seines Lichtes beraubt sieht, oder wenn er einen aus jenen seltneren Sternen mit langem leuchtendem Schweife am Himmel erblickt. Lalande sagt, nicht Homer allein, sondern auch der berühmteste Dichter des 16ten Jahrhunderts hegte jene Vorurtheile. Gleichsam zur Verewigung der Schande unserer Irrthümer singt dieser:

Qual con le chiome sanguinose horrende
Splender Cometa suol per l'aria adusta,
Ch' i regni muta e i fieri morbi adduce,
E a purpurei tiranni infausta luce. *Jer. lib. VII.* 51. *)

Herr Dr. Olbers hat erst neulich in einem sehr lesenswerthen Aufsatze (s. mon. Corresp. Nov. 1810) gezeigt, daß der Mensch sich nur thörichter Weise vor den Cometen fürchten würde, da die davon gedrohten Gefahren theils (wegen ihrer geringen Masse und schnellen Bewegung) nicht möglich sind, theils erst in Zeitperioden wahrscheinlich werden, zu denen die Dauer des menschlichen Lebens gar kein Verhältniß hat. Es wird nämlich erst in 220 Millionen Jahren

*) Sehr interessant in dieser Hinsicht sind: I. Camerarii Norica, s. de Ostentis lib. duo. cum praef. Phil. Melan. (Viteberg. apud G. Rhav. 1532.)

ren ein Comet mit der Erde der Wahrscheinlichkeit nach zusammenstoßen, und in 8 — 9 Mill. J. von der Atmosphäre eines Cometen die Erde berührt werden, und der Fall einer solchen Annäherung (bis auf 13000 franz. Meilen, oder etwa 9 Erdhalbmesser), die uns einige Weltweisen als zerstörend und verderbend für die Erde geschildert haben *), kann sich auch nur alle 4 Mill. J. einmal zutragen.

So zernichtet überhaupt die Sternkunde die Sterndeuterey, die Geburt des Aberglaubens, bald des Betruges Werkzeug, bald nichtiger Weisheit täuschender Nimbus.

Kühn ist Pope's Gedanke:

„Nature and nature's Laws lay hid in night:
God Said: Let Newton be, and all was light"

aber eben so schön, als wahr, in so fern Newton Schöpfer der physischen Astronomie ist. Wie viel Unübertreffbares dieser Weise durch den sicheren Hebel der Mathematik in jener Rücksicht geleistet habe, dieß sollte meinen Lesern durch das vorliegende Buch zum deutlichen Bewußtseyn gebracht werden. Ich legte zu diesem Ende Newton's unsterbliches Werk **) unmittelbar zum Grunde, und bemühte mich in die Beweise der zu meiner Absicht nöthigen schwersten Sätze einzudringen, und sie dann deutlich dar-

zu-

*) Der Comet v. 1770 gieng nach Burkhardt's Rechnung nur in einem Abstande von 36793 Halbm. der Erde von dieser vorüber, und doch hatte diese große Annäherung keine merkliche Folgen weder für die Erde, noch für Jupiters Mondensystem, durch welches er zweymal gieng.

**) Philosophiae naturalis principia mathematica. Auctore Isaaco Newtono, equite aurato. Edit. secunda auctior et emendatior. Cantabr. 1713.

zustellen. Dasselbe that ich in Betreff der Folgesätze, welche von Newton oft gleichsam nur angedeutet werden. Ich wünschte sehr, daß es mir dadurch gelungen wäre, viele meiner Leser, und zunächst die akademischen Jünglinge, auf dieses Werk, welches in der That bey einem großen Theile derselben in völlige Vergessenheit gerathen zu seyn scheint, von einem anderen Theile aber gleich einem Mysterienbuche muthlos bey Seite gelegt wird, nicht blos aufmerksam gemacht, sondern auch zum ernsten und sicher belohnenden Studium desselben ermuntert zu haben. In demselben Werke wird auch erklärt, was oben der Dichter zu wissen verlangte:

Qua vi maria alta tumescant
Obicibus ruptis, rursusque in se ipsa resident.

Würde man die Frage: welches ist die Wirkung der von der Sonne und dem Monde auf das Luftmeer ausgeübten Anziehungskraft? — auch nur durch Festsetzung von Regeln beantworten können, dann hätte sich die Witterungskunde einmal einer sicherern Basis zu erfreuen.

Bedarf es, lieber Leser! mehr noch, als des bereits Gesagten, zur Rechtfertigung der Herausgabe dieses Buches; so setze ich noch bey, daß meine Absicht zugleich auch dahin gieng, durch eben das Anziehende des hier behandelten Gegenstandes zum eifrigen Studium der reinen Mathematik aufzufordern. Die Art nämlich, wie ich die Astronomie in dieser Schrift vortrage, liegt zwischen der populären und streng wissenschaftlichen, welche sich auf jedes Detail mit größter Schärfe einläßt, in der Mitte. Daher

wähl-

wählte ich die Aufschrift: Grundriß. Ich habe jedoch keinen einzigen, streng in das Gebiet der theoretischen Astronomie gehörigen, Hauptgegenstand, nach welchem die Wißbegierde des Lesers fragen könnte, ohne wissenschaftliche Behandlung gelassen. Nur dasjenige, was man gewöhnlich zum Vortrage der Physik und der physischen und mathematischen Geographie zu rechnen pflegt, wurde von mir als bekannt vorausgesetzt; dasselbe wurde daher entweder ganz übergangen, oder nur mit wenigen Worten angedeutet; eine weitere Ausführung dessen, so wie die Auflösung nützlicher Probleme mit Hilfe der künstlichen Himmelskugel wurde gänzlich dem mündlichen Vortrage vorbehalten, indem ich die möglichste Kürze beabsichtigte, ohne jedoch meine Zuflucht zum Diktiren in die Feder nehmen zu müssen, was ohnedieß dem Sinne akademischer Vorlesungen zuwider ist.

Wenn nun das lebhaft gefühlte Bedürfniß, rücksichtlich der Himmelskörper, ihrer Bewegung, Größe, Abstände von einander ... Gewißheit zu erlangen, die Mutter der sphärischen, und hiedurch auch der ebenen Trigonometrie und einer gründlicheren Theorie höherer Curven war; so muß heut zu Tage das Interesse am glücklichen Studium der begründeten Astronomie zur Triebfeder dienen, die reine Mathematik in ihren wesentlichen und höheren Theilen, als dem Fundamente der Astronomie, mit allem Fleiße zu studieren.

In dem Bestreben, diese Absicht wenigstens bey meinen Candidaten zu erreichen, wie in der Betrachtung der Wissenschaft selbst, liegt der Grund, warum

ich

ich seit mehreren Jahren meine Vorlesungen über Mathematik und Physik mit einem kurzen Vortrage der Astronomie beschloß, ohne ein bestimmtes Lehrbuch zum Grunde zu legen. Dadurch und durch die Kürze der Zeit, die mir zu diesem Vortrage vergönnt war, waren mir äußerst enge Grenzen gesteckt. Eine möglichste Erweiterung derselben wird mir dieser Grundriß gewähren. Wenn daher der Astronom von Profession in ihm nichts findet, was er nicht längst schon, und mitunter aus den tiefsten Gründen der höheren Analyse wußte, so, daß ihm nur noch die Werke eines Gauß, Schubert, v. Zach, Schröter, Laplace . . . zu befriedigen vermögen; so kann doch dieß dem vorliegenden Buche nach seiner Bestimmung eben so wenig zum Vorwurfe gereichen, als dessen Verfasser sich erkühnet, sich damit in die Reihe jener Männer zu stellen, welcher der Stolz unserer Zeit sind.

Zur Erreichung meines Zweckes, der möglichst deutlichen Darstellung der abzuhandelnden Gegenstände, wählte ich mit Newton, Lalande *), Whiston **), Bode und Schulz ***) die Synthesis, indem die Anwendung der höheren Analyse auf Untersuchungen besonders aus der theorischen Astronomie theils mehr mathematische Vorkenntniße erfor-

*) De la Lande Astronomie. 3me édit. 1781. 4. Tom. in 4. und desselben Abrégé d'Astronomie, seconde édit. augmentée. 1795.

**) Praelectiones astron. Cantabrigiae in Scholis publ. habitae a Gulielmo Whiston, A. M. et Math. Prof. Lucasiano. Quibus accedunt tabulae plurimae astron. Cant. et Lond. 1707.

***) Populäre Anfangsgr. d. Astron. Königsb. 1806.

erfordert, als man bey den meisten Lesern voraussetzen kann, theils aber auch ihren ausgedehntesten Nutzen in Hinsicht auf praktische Astronomie hat. Welche wichtige Dienste übrigens allein schon die analytische Trigonometrie dem Astronomen leiste, davon zeugt beynahe jedes Blatt der theoretischen Astron. von Schubert; dasselbe kann man auch einigermaßen schon aus dem einsehen, was ich in meinem Lehrbuche der eben. u. sphär. Trigon., wo ich die Synthesis mit der Analysis verband, S. 172 aus Hrn. Prof. Rüdiger Handbuche der rechnenden Astron. (2t. B.), und von S. 290 — 301 über Anwendung der Trigon. auf Astron. anführte.

Dasjenige, was ich im Anhange dieses Buches über den Kalender nach Bode's und Lalande's Beyspiel beybrachte, dürfte, so wie dessen Kenntniß meinen Zuhörern gewisses Bedürfniß ist, auch dem größten Theile meiner Leser willkommen seyn. Eine kurze und wohlgerathene Abhandlung über chronologische Bestimmungen finden dieselben auch in der von Hrn. Prof. K. Chr. Langsdorf herausgegebenen Schrift: „Arithmetische Abhandl. (Heidelb. und Mannheim 1810.)" von S. 100 — 120.

Rücksichtlich der Geschichte der Astronomie wollte ich nur einzelne Hauptnotitzen geben; eine ausführliche Geschichte, wie sie z. B. Weidler *) und La-

*) Jo. Frid. Weidleri historia Astronomiae, s. de ortu et progr. Astron. liber Singularis. Vitemb. 1714. bis auf welches J. auch diese Gesch. fortgesetzt ist.

Lalande im 4t. B. seiner Astron. gaben, lagen außer meinem Plane. Eine kurze Geschichte der Astronomie aber findet man in der Geschichte der Mathematik, welche entweder den Lehrbüchern über diese beygefügt, oder auch eigends bearbeitet ist, wie z. B. in Kästner's Gesch. d. Mathem. von der Wiederherstellung der Wissenschaften an. Kurz und sehr lesenswürdig ist die Geschichte der Astronomie, welche Laplace seiner von Hauff übersetzten „Darstellung des Weltsystems" (II. Th. Frankf. a. M. 1797. von S. 215 — 340), dem Vorläufer seiner berühmten „*Mecanique céleste*" beyfügte. Am weitläufigsten wird in jenem Werke die allgemeine Gravitation und Perturbation abgehandelt.

Wer sich indessen auch nur einigermaßen überzeugen will, auf welchem niedrigen Standpunkte das Studium der Astronomie bis zu jener Periode stand, wo man den helleren Einsichten eines Copernikus, Tycho de Brahe, Keppler, Newton allgemeiner zu huldigen anfieng; wer es mit freudigem Dankgefühle anerkennen will, wie viel die Cultur der Astronomie durch das interesselose Zusammenwirken berühmter Männer, durch ihre mit Aufopferungen und Entbehrungen jeder Art unter allen Zonen der Erde angestellten Beobachtungen und Vermessungen, durch die, nicht selten großmüthigen, Unterstützungen der meisten Fürsten Europas in neueren Zeiten gewonnen habe, der schlage nur die vor jener glücklicheren Epoche allgemein gängigen und in den

Schu-

Schuken herrschenden Compendien über Astronomie auf! Zwey derselben habe ich vor mir liegen; das eine *) enthält nebst der Sphäre des *Joh. de Sacro Bosco* **) und der darauf sich beziehenden Stücke auch noch die „*Expositio XXII ex lib.* 3. *epitomae Joan. de Regio monte* ***) *in Almagestum Ptolomaei: dies naturales duplici causa inaequales esse*“ — und „*ex Alfrag.* ****) *de ortu et occ. planet. et de occultationibus eorum sub radiis Solis. Differ.* 24.“ Interessant ist die gleich darauf folgende Abhandlung „*de ortu poetico, hoc est, exempla ortus et occasus stellarum fixarum ex variis auctoribus collecta, et ad studiosorum utilitatem diligenter explicata, incerto auctore.*“ Es werden darin Stellen aus Hesiod, Virgil, Ovid, Aristoteles mit Citaten aus Plinius, Polybius, Columella erklärt; Stellen, welche nebst anderen auch in der vortreflichen Abhandlung über denselben Gegen-

*) Sphaera Joan. de sacro Bosco emendata. Eliae Veneti Santonis Scholia in eandem Sph., ab ipso authore restituta. Adjunximus huic lib. compend. in Sphaeram per Pierium Valerianum Bellunensem et Petri Nonii Salaciensis demonstrationem eorum, quae in extremo cap. Sacroboscius scribit de inaequali climatum latitudine, eodem Vineto interprete. Coloniae apud Maternum Colinum 1566.

**) Eines ums J. 1230 berühmt gewordenen Astronomen, geb zu Halifax in England, Lehrers der Philos. u. Mathem. zu Paris.

***) Regiomontan's, welcher mit Müller, Peurbach (dem Lehrer der ersteren) und Walther jene glücklichere Zeit vorbereitete.

****) Ahmed Ebn Cothair Ferganensis, qui vulgo Alfraganus, ab oppido Fergana, ubi natus fuit, vocatur (s. Weidler). Alfragan, welcher unter dem mächtigen arabischen Chalifen Almamum, dem Beförderer des astronom. Studiums, im 9ten Jahrh. mit dem weit berühmteren AlBatani (Albategnius) lebte, entlehnte fast alles aus Ptolomäus.

Gegenstand *) von Hrn. Prof. Pfaff angeführt werden. Der ungenannte Verfasser beruft sich bey seinen Erklärungen auf 2 von ihm verfertigte Tabellen, welche aber meinem Exemplare fehlen. Am Schlusse sind diesem Compendium die fatalen Wirkungen, welche die Finsternisse auf Luft, Menschen, Thiere und Pflanzen haben sollen, aus Proclus beygedruckt, z. B. *Sol cum laborare visus fuerit in ♉ denario primo negotiatores affligit, et irrita tractare cogit, omniaque eorum negotia subruit: satis quoque et segetibus obest. — In altero decano peregrinantibus parturientibusque parat incommoda; — in postremis pestemque famemque inducit.*

Das andere Compendium **) enthält auf 123 S. in 8. die *Theoricas novas Planetarum*, von Purbach 1460 herausgegeben. Weidler drückt sich hierüber so aus: „*Sed cum antiquiores Campani et Gerhardi Cremonensis planetarum theoriae prorsus viderentur inconcinnae, occasionem inde nactus est novas comminiscendi, quae essent loco isagoges in almagestum Ptolomaei. Nimirum planetae cujusque coelum, totalemve orbem concentricum habuit, verum orbe hoc existente tam crasso, seu profunditatis cujusdam insignis, intra hanc crassitudinem accipi posse voluit orbem eccentricum, crassitudinis aequalis, quae intra duos residuos crassitudinis in-*

*) Joan. Frider. Pfaff Stuttgartensis commentatio de ortibus et occas. Siderum apud auctores classicos commemoratis — in concertatione civium Academ. Georg. August. IV Jun. 1786 ab ordine philosophorum praemio ornata.

**) Theoricae novae Planetarum Georgii Purbachii, Germani. Franc. Maurolyci Computus ecclesiasticus, s. de ratione anni. Henric. Glareani, Helvetii de Geographia, vel rudimentorum mathem. lib. unus. Omnia recognita et novis fig. illustrata. Coloniae Agrippinae, apud haeredes Arnoldi Birkmanni. 1581.

inaequalis et revolvi posset, et aut ipsum planetam aut epicyclum, planetam convehentem, suaeque crassitiei insertum, circumduceret, adeo, ut posset proinde planeta et per orbem totalem primi mobilis impressionem recipere, et per eccentricum revolutionem propriam obire.“ Sonderbar genug, aber so ganz im Geiste der damaligen Zeit formirt der Vorredner dieses Compendiums (*Albertus Herosnecanus*) gerade aus dieser von der Vernunft, wie er sagt, nicht annehmbaren Anordnung des Sonnensystems ein Argument, warum die Astronomie studiert zu werden verdiene, indem diese vor allen andern Wissenschaften geschickt sey, den Geist der Sterblichen zum Glauben an das Unbegreifliche vorzubereiten. Auch erhelle die Blindheit der menschlichen Vernunft am klärsten daraus, daß die Astronomen nicht erklären könnten, warum uns der Mond, den sie in einem Epicykel bewegen ließen, denn doch beständig dieselbe Seite zukehre. So glaubte man damals durch Prostitution seiner eigenen Vernunft des Himmels schönste Gabe zur Ehre Gottes abwürdigen zu müssen! — Für denjenigen ferner, der die Fortschritte auf jedem Gebiete des Wissens erkennen und würdigen will, wird weder die (Weidlern und Kästner, wie es scheint, unbekannt gebliebene) Abhandlung über die Climate von Nonius oder Nunez in jenem ersten Compendium, noch die letzte über Geographie in diesem Comp. ohne Interesse seyn. Die institutiones astron. *I. Ringelbergii Antuerp.* 3. lib. contentæ etc. (Colon. per Quentell (1528) betreffen gleichsam nur das Aeußere der Astronomie.

In Ansehung endlich des Geschichtlichen der Sternbilder und Sterne, ihrer Bedeutung und Namen

men verweise ich auf Bode's Anleit. zur Kenntn. d. gestirnt. Himmels; Hrn. Prof. Voigts sehr nützliche Schrift „Kosmographische Entwickelung der vornehmsten Begriffe und Kenntn., welche bey der zweckm. Benutzung der künstlichen Himmmels- und Erdkugel erforderlich sind" (Weimar, 1810), auf Ancillon's Abhandl. über den Ursprung und die Bedeutung uralter Sternnamen in dem astron. Jahrbuche für 1788 v. Bode, und auf Ideler's Werk über denselben Gegenstand (Berl. 1806.)

Die Theorie der Kegelschnitte kurz und deutlich darzustellen, dazu forderte mich besonders die gründliche Beantwortung vieler astronomischen Fragen auf. Allein auch die Mathematik in ihren angewandten Theilen, vorzüglich der Optik, Katoptrik, Mechanik, muß einen großen Theil ihrer wichtigsten Sätze aus der genauen Kenntniß der Natur der Curven schöpfen. Die so folgenreiche Lehre vom Pendul bestimmte mich, unter den transcendenten Curven die einzige Cykloide noch mit in diese Theorie aufzunehmen, und nach Newton zu zeigen, warum der Physiker diese krumme Linie mit Recht *lineam tautochronam* und *brachystochronam* nenne.

Die Cissoide und Conchoide, welcher sich Diocles und Nikomedes zur Auflösung des Delischen Problems, dessen ich in meinem Lehrbuche der Geometrie erwähnt habe, bedienten, wurden von mir mehr des Beyspieles wegen angeführt, indem erstere eine Curve dritter — letztere eine Curve vierter Ordnung ist.

Uebri-

Uebrigens habe ich auch zur Darstellung dieser Theorie in ihren eigentlichen Fundamenten die Synthesis gewählt, überzeugt, daß eine auf höhere Analysis gegründete Behandlung der Curven sich schlechterdings nicht für Anfänger eigne, weil dieselbe bey ihrer großen Allgemeinheit und Kürze den Grad von Deutlichkeit nicht gewährt, welchen die Synthesis giebt. Aus demselben Grunde befolgte ich auch die Methode, die Kegelschnitte als gegeben zu betrachten, und unter dieser Voraussetzung Gleichungen für sie zu suchen, eine Methode, welcher sich auch Hr. Prof. Heinrich in seinem vorzüglichen Buche (de sectionibus con. tractat. analyt. Ratisb. 1796.) bediente. Nebst diesem und den allgemein bekannten Lehrbüchern eines Kästner, Karsten, Mönnich ... benützte ich bey Abfassung dieses Theiles der höheren Geometrie noch Belidor's nouveau Cours de Mathematique (à Paris. 1725.) und Bezout's Cours d. Mathem. (à Versailles 1789.)

Gegeben Würzburg den 1sten Febr. 1811.

Der Verfasser.

Die

Die Lehre

von

den Kegelschnitten.

22233 ic
BCB

Einleitung.

§. 1. Erklärungen.

Wenn ein gerader Kegel (G. §. 170.) * von einer Ebene entweder mit des Kegels Grundfläche, oder mit einer Seite desselben parallel, oder mit einer größeren Neigung zur Grundfläche des Kegels, oder mit einer kleineren, als zu dessen Seiten, geschnitten wird; so heißt die durch einen solchen Schnitt entstandne Fläche, oder die diese Fläche begrenzende Curve überhaupt ein Kegelschnitt (Sectio conica), und zwar nach der Ordnung 1) der Kreis, oder die Kreislinie; 2) die Parabel (parabola); 3) die Ellipse (ellipsis); 4) die Hyperbel (hyperbola).

§. 2. Erklärungen.

Die algebraische Gleichung, durch welche man die Natur oder das Wesen einer Curve so darstellt, daß sich

*) Meine in dieser Schrift citirten Lehrbücher, nämlich 1) die Buchstabenrechnung und Algebra; 2) die Geometrie; 3) die ebene und sphärische Trigonometrie — bezeichne ich kurz nach der Ordnung mit B.; G.; T.

daraus eine oder mehrere Haupteigenschaften einer Curve deutlich entwickeln oder erkennen lassen, nennt man eine Gleichung zur Curve (aequatio ad curvam), und die krumme Linie selbst bekömmt nach dem Grade der für sie gefundenen Gleichung den Namen einer Curve der zweyten, dritten... Ordnung. Die gerade Linie selbst macht die erste Ordnung. Die genannten Kegelschnitte sind Curven der zweyten Ordnung, wie unten erhellen wird. Ferner gehören sie zur Klasse der sogenannten algebraischen Curven, weil man aus ihren Gleichungen die Natur derselben ganz erkennen kann; sonst gehören die Curven zur Klasse der transcendenten (limites quasi algebrae transcendentium). Die Curven der ersten Klasse hatte Deskartes geometrische, die der zweyten mechanische genannt. Eine transcendente Curve ist z. B. die Radlinie (cyclois), eine Curve, die wir gleichsam täglich vor den Augen haben, indem sie vom Nagel eines fortgehenden Rades beschrieben wird, wo die mit der Axe des Rades geradlinige Bewegung mit der Kreisbewegung des Rades um seine Axe selbst in eine Bewegung zusammenfällt.

§. 3. Gleichung für die Kreislinie.

Zur Erläuterung des vorhergehenden §. diene folgendes: (Fig. 1.) Auf den Durchmesser Ss, die Abscissenlinie (linea absciſſarum), sey irgend ein Perpendikel BD = y (dergleichen Lothe, oder überhaupt Parallellinien, welche unter irgend einem Winkel auf

der

der Abscissenlinie Ss aufstehen, heißen Ordinaten — ordinatae —,) gefällt, dessen entsprechende Linie vom Punkte S aus, der hier der Anfangspunkt der Abscissen seyn soll, ist die Abscisse SD = x (BD und SD heißen Coordinaten).

Demnach ist $y^2 = x$. Ds (G. §. 124. Zus. 1.). Denkt man sich nun um Ss den Kreis bewegt, folglich S als den Scheitel der Curve, und Ss als deren Axe = a; so ist Ds = Ss — SD = a — x, folglich $y^2 = ax - x^2 = (a-x)\,x$, die Gleichung für die Kreislinie zwischen den Ordinaten und Abscissen (diese vom Scheitel der Curven an gerechnet), wodurch die Natur dieser Curve gänzlich bestimmt wird.

Die Kreislinie ist nämlich diejenige Curve, in welcher 1) das Quadrat jeder Ordinate gleich ist dem Rechtecke aus den entsprechenden Abscissen; 2) welche 2 auf beyden Seiten der Axe gleiche Aeste hat, indem $y = \pm\sqrt{(ax - x^2)}$; 3) welche in sich selbst zurückekehrt; denn wenn y in der Gleichung = o wird; so wird nicht nur die andere Seite der Gleichung auch = o, sondern es wird auch x = a, d. i. die Abscisse der Axe gleich. 4) Setzt man $x = \frac{1}{2}a$; so entwickelt man aus der Gleichung auch $y = \frac{1}{2}a = x$, d. i. im Mittelpunkte ist die Abscisse der entsprechenden Ordinate gleich, so wie alle Halbmesser einander gleich sind.

§. 4 Erklärungen.

1. In den Kegelschnitten nennt man Parameter (parameter curvae) diejenige konstante Linie, mit welcher die veränderlichen Größen, die Ordinaten und Abscissen verglichen werden.

2. Brennpunkt der Curve (focus) heißt der Punkt der Axe, in welchem die Ordinate dem halben Parameter gleich ist.

3. Jede gerade Linie, vom Brennpunkte zur Curve gezogen, wird Radius vektor (radius vector) genannt.

Erstes Hauptstück.

Von der Parabel.

Erster Abschnitt.

Von der Parabel, auf die Axe bezogen.

Fig. 2.

§. 5. Aufgabe. Es sey des geraden Kegels ABC Schnitt SGPMS, wodurch die Parabel erzeugt wird, gegeben, man soll zwischen den Ordinaten und Abscissen eine Gleichung für die Parabel finden.

Auflösung. Aus S, dem Scheitel der Parabel, ziehe man SD || AB, und vom Punkte P aus, in welchem die Axe der Parabel den Durchmesser der Grundfläche des Kegels schneidet, errichte man das Loth PM. Da nun MP sowohl auf die Axe SP, als auf BC senkrecht ist; so ist dieses Loth die Ordinate (y) sowohl für die Kreislinie der Grundfläche, als auch für die Parabel; die ihr entsprechende Abscisse (x) ist SP.

Nun ist $PM^2 = PB \,.\, PC = PB \,.\, SD$, und, weil $\triangle ASD \sim \triangle SBP$, $AD : SD = SP : PB$, folglich

$$PB = \frac{SD \,.\, SP}{AD}; \quad \text{daher } PM^2 = \frac{SD^2}{AD} \,.\, SP, \text{ d. i. } y^2 = \frac{SD}{}$$

$\frac{SD^2}{AD}$. x. Da nun $\frac{SD^2}{AD}$ = dem Parameter = p gesetzt werden kann, indem, wegen AD : SD : p, jener Ausdruck eine gerade, und zwar eine konstante Linie bezeichnet, so lange das △ ASD, oder der Anfang S der Abscissen unverändert bleibt; indem ferner, wenn man setzt $x : y : \frac{SD^2}{AD}$, offenbar ist, daß letzterer Ausdruck, oder das △ ASD zur Vergleichung und Bestimmung des Verhältnisses der veränderlichen Größen x und y diene: so ist die gesuchte Gleichung

$$y^2 = px.$$

Zusätze, die Haupteigenschaften der Parabel enthaltend.

1. Die Parabel ist also diejenige krumme Linie, in welcher das Quadrat jeder Ordinate gleich ist dem Rechtecke aus dem Parameter in die entsprechende Abscisse; und betrachtet man 2 Ordinaten Y, y, wo dann $Y^2 : y^2 = X : x$, so kann man die Parabel als diejenige Curve definiren, in welcher die Quadrate der Ordinaten wachsen, wie die entsprechenden Abscissen. Hieraus schließt man rückwärts, daß, wo dieses Verhältniß (wie beym schiefen Wurfe der Körper) eintrift, die beschriebene Curve eine Parabel sey.

Fig. 3.

2. Die Parabel hat 2 auf beyden Seiten der Axe gleiche Aeste, oder wird von der Axe Ss halbirt, indem $y = \pm \sqrt{px}$ ist.

3. Diese

3. Diese Aeste laufen aber ins Unendliche aus; denn jedem größeren x entspricht ein größeres y vermöge der Gleichung; also kehrt diese Curve nicht in sich zurücke.

4. Es ist jedesmal x: y: p, d. i. die Ordinate ist die mittlere Proportionallinie zwischen der ihr entsprechenden Abscisse und dem Parameter; oder dieser ist die dritte Proportionallinie zu den Coordinaten.

5. Da im Brennpunkte ist y (wie Fm′) $= \frac{1}{2}$ p, oder $y^2 = \frac{1}{4} p^2$, daher $px = \frac{1}{4} p^2$, oder $x = \frac{1}{4}$ p, x (FS) aber den Abstand des Brennpunktes F vom Scheitel S der Curve oder der Axe bezeichnet; so gleicht dieser Abstand dem 4ten Theile des Parameters; oder der Parameter der Axe gleicht dem vierfachen Abstande des Brennpunktes vom Scheitel der Axe.

§. 6. Aufgabe. Es ist die Axe SN und der Scheitel S gegeben, man soll den Parameter und den Brennpunkt der Parabel finden.

Auflösung. Man ziehe irgend eine Ordinate Pm, dann mS und errichte im Punkte m das Loth ms; so ist, weil SP : Pm : Ps (G. §. 124.), oder x : y : Ps, Ps der gesuchte Parameter (§. 5. Zus. 4.). — Macht man $SF = \frac{1}{4}$ p, so ist F der gesuchte Brennpunkt (das. Zus. 5.).

§. 7. Erklärung. Das indefinite Perpendikel XZ auf die verlängerte Axe, welches so weit von S, als F von S, absteht, heißt Direktrix der Parabel.

§. 8.

§. 8. Lehrsatz. Jeder Punkt M der Parabel ist von der Direktrix und dem Brennpunkte gleichweit entfernt.

Beweis. Es ist der Radius vektor $MF = \sqrt{(MP^2 + FP^2)} = \sqrt{[px + (x - \frac{1}{4}p)^2]} = x + \frac{1}{4}p = SP + SF = AP$ (§. 7.); aber auch die durch das Loth MQ bezeichnete Distanz ist $= AP$, also ꝛc.

§. 9. Aufgabe. Es ist der Brennpunkt F in der geraden Linie SN gegeben, oder willkührlich angenommen, man soll die Parabel beschreiben.

Auflösung. Man ziehe die Direktrix, und errichte willkührlich indefinite Lothe, wie Pm, Fm'...; so werden die mit den Halbmessern PA, FA... auf jenen Lothen abgeschnittenen Punkte m, m'... Punkte der zu beschreibenden Parabel seyn (§. 8.).

Zweyter Abschnitt.

Von der Parabel, auf die Tangente bezogen.

---

§. 10. Eine Tangente für den Punkt M der Parabel zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe die Direktrix AZ, den Radius vektor FM, dann MQ ‖ SN; so wird die den Winkel FMQ halbirende Linie MT die für M zu ziehende Tangente seyn.

Be-

Beweis. Jeder andere Punkt p liegt auſſer der Curve. Denn läge p noch in dieſer; ſo wäre pF = pq (§. 8.). Nun iſt Fb = bQ, und die Nebenwinkel bey b ſind gleich, folglich rechte Winkel, alſo Fp = pQ; es wäre daher pq = pQ, was unmöglich iſt.

Zuſatz. Da △ TFb ≅ △ bQM, daher TF = QM = AP; ſo iſt TS = SP, d. i. der Abſtand des Punktes T der Tangente vom Scheitel gleich der Abſciſſe.

§. 11. Erklärungen.

1. Subtangente heißt der Theil PT der verlängerten Axe Ss, welcher zwiſchen der vom Berührungspunkte M der Tangente MT zur Axe gezogenen Ordinate MP und dem Punkte T liegt, wo die Axe verlängert mit der Tangente zuſammenſtößt.

2. Normale heißt das in der Axe begrenzte Loth MN auf den Berührungspunkt der Tangente.

3. Subnormale heißt der Theil PN der Axe, welcher zwiſchen der Ordinate PM und der Normale MN liegt.

§. 12. Aufgabe. Den Werth der Subnormale PN zu finden.

Auflöſung. Da NM und FQ ſenkrecht auf TM ſind; ſo macht die Figur NQ ein Parallelogramm, folglich FN = QM = AP, alſo FN − FP = AF + FP − FP = AF = 2SF (§. 7.) = $\frac{1}{2}$ p (§. 5. Zuſ. 5.) = PN, d. i. die Subnormale der Parabel gleicht dem halben Parameter, iſt folglich eine konſtante; oder

ſie

sie gleicht der durch den Brennpunkt gehenden Ordinate §. 4. 2)).

Zusatz. Im gleichschenkligen △ FMQ ist FM = MQ = FN = FT (§. 10. Zus.) d. i. FM = FN = FT. Will man also für einen Punkt M eine Tangente ziehen; so darf man nur dem gezogenen Radius vektor FM die Linien FT, FN gleich machen, so wird dann NM die Normale und TM die Tangente für M seyn.

§. 13. Aufgabe. Den Werth für die Normale MN zu finden.

Auflösung. $MN = \sqrt{(MP^2 + PN^2)} = \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}p^2)} = \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)}$ (§. 5.).

§. 14. Aufgabe. Den Werth für die Subtangente PT zu finden.

Auflösung. PN : PM : PT, d. i. $\frac{1}{2}p : y : \frac{2y^2}{p}$, oder $PT = \frac{2px}{p} = 2x$, d. i. die Subtangente gleich der doppelten Abscisse.

Zusatz. Da $MT = \sqrt{(PT^2 + PM^2)}$; so hat man nach §§. 13. 5. den algebraischen Ausdruck für die Tangente $MT = 4x^2 + px$.

§. 15. Lehrsatz. Ein aus dem Brennpunkte F der Parabel ausgehender Stral FM, welcher von irgend einem Punkte M der Parabel, auf die er trift, zurücke geworfen wird, geht parallel mit der Axe Ss in der Richtung Mv fort; und umgekehrt.

Beweis. Der vom Strale FM mit der Normale MN gebildete Winkel NMF heißt Einfallswinkel (angulus incidentiae), und der Winkel NMv Ausfallswinkel (angulus reflexionis). Beyde Winkel sind gleich. Denn da die Winkel bey M halbirt sind; so ist der dem einen am Scheitel opponirte Winkel vMp auch $=$ FMT. Aber FMT $+$ NMF $=$ NMv $+$ vMp $= 90°$; also NMF $=$ NMv. Also bezeichnet Mv den Weeg für den ausfallenden Stral FM, und MF den Weg für den nach vM einfallenden Stral.

§. 16. Lehrsatz. Das aus F auf die Tangente MT gefällte Loth Fb ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Abständen des Brennpunktes vom Berührungspunkte M, und dem Scheitel S.

Beweis. $\triangle$ TbF $\backsim$ $\triangle$ FbM, und Tb $=$ bM, wie TS $=$ SP (§. 10. Zus.); daher Sb $\parallel$ PM (G. §. 112. II.) und bS senkrecht auf Ts, daher $\triangle$ FSb $\backsim$ FbT $\backsim$ FbM (G. §. 124. 1)); also FM : Fb $=$ Fb : FS, oder $Fb^2 = FM.FS$.

Zusatz 1. Da FS für dieselbe Parabel eine konstante ist; so ist, wenn man sich für einen andern Punkt M, eine Tangente, und auf diese das Loth Fb′ gezogen denkt, $Fb^2 : Fb'^2 = FM : FM'$, oder die Lothe aus dem Brennpunkte auf die Tangenten der Parabel sind im subduplizirten Verhältnisse der Radien vektoren. (Newton bediente sich in seinen Princ. math. L. I. prop. XIII. dieses Satzes zum Beweise, daß sich Körper, von der Centripetal —

und

und Tangentialkraft getrieben, in irgend einem Kegelschnitte bewegen).

Zusatz 2. Da auch der Winkel bey F durch FQ halbirt ist, so ist, wenn FM = Sin. tot. = 1, Fb = Sin. FMb = cos. bFM = cos. $\frac{1}{2}$ SFM. Daher $FM = \frac{Fb^2}{FS} = \frac{Sin.\ FMb^2}{FS} = \frac{cos.\ \frac{1}{2}\ SFM^2}{FS}$; eine algebraischer Ausdruck für den Radius vektor. Oder es ist FM : FS = 1 : cos. $\frac{1}{2}$ SFM^2. Ist daher die Sonne in F, ein Comet in M, SFM dessen wahre Anomalie und S dessen Sonnennähe; so findet man aus der Proportion: das Quadrat des Cosinus der halben wahren Anomalie verhält sich zum Quadrat des Sin. tot., wie der Abstand SF von der Sonnennähe zum Abstande FM des Cometen von der Sonne.

Zusatz 3. Denkt man sich 2 Radien vektoren FM, FM′, und setzt die Konstante FS, wie den Sin. tot. = 1, die W. SFM = φ und den dem Radius vektor FM′ entsprechenden W. = ψ; so hat man $\surd$ FM + $\surd$ FM′ : $\surd$ FM − $\surd$ FM′ = cos. $\frac{1}{2}\varphi$ + cos. $\frac{1}{2}\psi$: cos. $\frac{1}{2}\varphi$ − cos. $\frac{1}{2}\psi$ = cot. $\frac{1}{4}$ (φ + ψ) : tang. $\frac{1}{4}$ (φ − ψ) (T. §. 30.); eine für die Astronomie sehr nützliche Proportion, indem man mittelst ihrer, wenn 2 Radien vektoren der Parabel mit dem zwischenliegenden Winkel gegeben sind, den Abstand der Sonnennähe und 2 wahre Anomalien finden kann.

Dritter Abschnitt.

Von der Parabel, auf ihre Durchmesser bezogen.

§. 17. Erklärungen.

1. Jede durch den Mittelpunkt eines Kegelschnitts gehende Sehne heißt sein Durchmesser, und wenn derselbe eine Reihe paralleler Sehnen halbirt; so sind diese die ihm zugeordneten Sehnen, oder Ordinaten. Unter den letztern findet sich allemal ein dem vorigen zugeordneter Durchmesser. Der Winkel, unter welchem sich beyde schneiden, heißt der Conjugationswinkel. Ist dieser $= 90°$, wie Fig. 1. für Ss und λ/λ, oder in Beziehung auf die Axen der Ellipse, Ss, Ll; so nennt man diese Durchmesser auch die Hauptdurchmesser der Curve.

Fig. 4.

Weil nun die Parabel eigentlich keinen Mittelpunkt hat, ein solcher daher nur unendlich vom Scheitel S entfernt angenommen werden kann, so, daß jede durch ihn gehende gerade Linie der Axe Ss parallel wird; so nennt man eine jede solche Parallellinie Mq, welche die Parabel in irgend einem Punkte M trifft, den Durchmesser der Parabel.

2. Jede mit der durch den Scheitel M des Durchmessers Mq gehenden Tangente TM parallele Sehne cc der Parabel, oder ihre Hälfte heißt Ordinate des Durchmessers.

3. Der

3. Der zwischen dem Scheitel M und der Ordinate liegende Theil Md des Durchmessers Mq ist die Abscisse des Durchmessers.

§. 18. Lehrsatz. Der Durchmesser Mq halbirt seine Ordinaten.

Beweis. Man verlängere den Durchmesser qM, bis er auf die mit PM parallele Linie SQ trifft; eben so sey il ‖ PM, und, wie diese, auf Ss senkrecht. Nun ist

1) △ STh ≅ hMQ wegen der wechselseitig gleichen Winkel und TS = SP (§. 10. Zus.) = QM. Daher zu beyden ShMP hinzugethan, △ PTM = PQ.

2) Die ähnlichen Dreyecke PTM, icA verhalten sich, wie $PM^2 : ic^2$ (G. §. 133. Zus. 1.) = SP : Si (§. 5. Zus. 1.) = PQ : iQ, wegen der gleichen Höhe SQ = il (G. §. 111. Zus.); oder PTM : PQ = icA : iQ, folglich icA = iQ.

3) Eben so ist PMT : geA = $PM^2 : ge^2$ = SP : Sg = PQ : gQ; daher wieder geA = gQ, und von beyden dasselbe icdfgi weggenommen, ist dfe + icA = cld + iQ, folglich (aus 2)) dfe = cld; diese Dreyecke sind aber auch zugleich ähnlich, folglich kongruent, also de = dc.

Derselbe Beweis kehrt in Ansehung jeder andern Ordinate des Durchmessers zurücke.

*So wie wir oben die von andern Mathematikern genannte Semiordinate durch Ordinate ausdrückten; so nennen wir auch hier künftig cd oder Sn Ordinaten des Durchmessers.

§. 19.

§. 19. Lehrsatz. Die Quadrate der Ordinaten cd, Sn für irgend einen Durchmesser Mq verhalten sich, wie ihre entsprechenden Abscissen Md, Mn.

Beweis. 1) $\triangle$ dcl = dT. Denn Mkl = ch + hA = kA, weil Mkl + kQ = SAb + Ah (§. 18. 1)), folglich, wenn man ch addirt, und SAb = CQ (indem SAb = iAc — ib, und cQ = iQ — ib, aber iAc = iQ — §. 18. 2) —) auf beyden Seiten abzieht; so hat man Mkl = kA.

2) $\triangle$ SnQ = Tn, wegen TSh = hMQ.

3) Die ähnlichen Dreyecke dcl, SnQ sind, wie $cd^2 : Sn^2 = dT : Tn$. Aber diese sind, wie Md : Mn (wegen einerley Höhe); daher $cd^2 : Sn^2 = Md : Mn$.

Zusatz. Man mag also die Parabel auf den Durchmesser, oder auf die Axe beziehen; so findet man dieselben Haupteigenschaften der Parabel, wie dieselbe Gleichung, wie dieß deutlich aus dem Folgenden erhellt.

Denn nennt man p' den Parameter für den Durchmesser, x' und y' dessen Coordinaten: so ist 1. $cd^2 : Sn^2 = p'Md : p'Mn$, oder $y'^2 : Y'^2 = p'x' : p'X'$, d. i. $y'^2 = p'x'$.

2. Weil also $Sn^2 = p'Mn$, so ist $p' = \frac{Sn^2}{Mn} = \frac{TM^2}{TS} = \frac{TM^2}{SP} = \frac{SP^2 + PM^2}{SP} = \frac{4x^2 + px}{x} = 4x + p = 4FM$ (s. den Bew. §. 8.), und $FM = \frac{1}{4}p'$; d. i. der Parameter für den Durchmesser ist gleich dem 4fachen Radius vektor

für den Punkt M, oder dem 4fachen Abstande des Brennpunktes vom Scheitel desselben Durchmessers, und dieser Abstand ist der vierte Theil des Parameters p'.

3. Da also $p' = 4x + p$, so ist p' immer größer, als der Parameter p der Hauptaxe Ss, und zwar solange, bis $x = 0$, oder M mit S zusammenfällt.

4. Nimmt man ferner auf Mq $Mn = x = \frac{1}{4}p'$, so kann man sich n, wie bey der Hauptaxe, als Focus vorstellen, und es ist dann auch hier, weil nach 1) $y'^2 = p'x' = \frac{1}{4}p'^2$, oder $4y'^2 = p'^2$, auch $2y' = p'$, d. i. der Parameter gleich der doppelten Ordinate 2Sn, oder diese gleich $\frac{1}{2}p'$.

Zwey-

Zweytes Hauptstück.

Von der Ellipse.

Erster Abschnitt.

Von der Ellipse, auf die Axen bezogen.

Fig. 5.

§. 20. Aufgabe. Es sey der Schnitt des Kegels gegeben, wodurch eine Ellipse entsteht: man soll eine Gleichung für sie zwischen den Abscissen, vom Scheitel S an gerechnet, und den Ordinaten, bezogen auf die Axe Ss, finden.

Auflösung. Es sey EG der Durchmesser eines der Grundfläche des Kegels parallelen Kreises; durch S, der Curve Scheitel, und s ziehe man SD, hs parallel mit EG; die sowohl auf EG, als Ss senkrechte Linie PM sey die Ordinate $= y$, die ihr entsprechende Abscisse $SP = x$.

Also, wie oben §. 5. $PM^2 = y^2 = EP \cdot PG$; aber weil $\triangle SEP \sim Shs$, $Ss : SP = hs : EP$, d. i. $EP = \frac{hs \cdot x}{a}$. Eben so erhält man, weil $\triangle$

$SDs \backsim PGs$, $PG = \frac{(a - x).\ SD}{a}$, folglich $y^2 = \frac{hs.\ SD}{a} \cdot \frac{ax - x^2}{a}$; setzt man nun aus demselben Grunde, wie im §. 5. den ersten Faktor $= p$; so hat man $y^2 = \frac{apx - px^2}{a} = px - \frac{px^2}{a}$ die gesuchte Gleichung für die Ellipse.

Zusätze, die Haupteigenschaften der Ellipse enthaltend.

1. Aus der Gleichung hat man: $y^2 : (a - x) = x = p : a$, d. i. das Quadrat der Ordinate PM verhält sich zum Rechtecke aus den Abscissen sP. SP, wie der Parameter zur Axe Ss; und rücksichtlich zweyer Ordinaten PM, pm derselben Ellipse verhalten sich, weil $p : a$ ein konstantes Verhältniß ist, die Quadrate dieser Ordinaten, wie die Rechtecke aus ihren entsprechenden Abscissen, wie SP. Ps: Sp. ps.

Stehen diese 2 Ordinaten von S und s gleichweit ab; so werden letztere Rechtecke gleich, daher auch $Y^2 = y^2$ oder $Y = y$.

2. Wie bey der Kreislinie (§. 3.), so wird auch hier, wenn man in der Gleichung $y = 0$ setzt, $x = 0$ und $x = a$; also ist die Ellipse eine in sich selbst zurückekehrende, und die Axe in S und s schneidende Curve, welche 2 auf beyden Seiten der Axe gleiche Aeste hat, indem $y = \pm \sqrt{(px - \frac{px^2}{a})}$.

3. Den

3. Den Mittelpunkt C der Axe Ss nennt man den Mittelpunkt der Ellipse; die doppelte Ordinate Ll, welche durch C geht, heißt die kleine Axe = c der Ellipse (auch zugeordnete Axe — axis minor, Secundus, rectus), zum Unterschiede von der großen Axe (auch Zwergaxe — axis major, primus, principalis, transversus).

Nun ist, wenn $x = \frac{1}{2}a$, $y^2 = CL^2 = \frac{1}{4}ap$, der Ausdruck für das Quadrat der halben kleinen Axe; daher $4CL^2 = ap$, oder $a : 2CL : p$, d. i. die kleine Axe Ll ist die mittlere Proportionallinie zwischen der großen Axe und dem Parameter, und der Parameter $p = \frac{c^2}{a}$ ist eine Konstante.

4. Weil p sowohl $= \frac{c^2}{a}$, als $= \frac{hs.\,SD}{a}$, so ist auch $hs : c : SD$.

5. Sezt man $a = \infty$, so geht die Ellipse in eine Parabel über, weil dann $y^2 = px$ wird; und sezt man $c = a$, so wird, weil $p = \frac{c^2}{a} = a$, $y^2 = \frac{a^2x}{a} - \frac{a^2x^2}{a^2} = ax - x^2$, d. i. die Ellipse ein Kreis (§. 3.).

6. Sezt man für p den in beyden Axen gegebenen Werth $\frac{c^2}{a}$ in der gefundnen Gleichung; so hat man:

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2) = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2}$$

und

und $y^2 : ax - x^2 = c^2 : a^2 = \frac{1}{4}c^2 : \frac{1}{4}a^2$, d. i. eine Gleichung für die Ellipse auf beyde Axen bezogen, und jene Proportion, oder $PM^2 : SP.sP = Ll^2 : Ss^2$ giebt eine neue Eigenschaft der Ellipse. Stellt man sich über die große Axe einen Kreis beschrieben vor; so hat man aus jener Proportion diese: $PM : PN = Ll : Ss$. Woraus der Satz folgt, daß, weil Ll: Ss ein beständiges Verhältniß ist, alle Ordinaten der Ellipse zu der entsprechenden des umschriebenen Kreises ein konstantes Verhältniß haben.

Fig. 1.

Würde man daher die Ordinaten DB, PM... einer Kreislinie halbiren; so würde die durch die Durchschnittspunkte b, m, s... gehende Curve eine Ellipse seyn.

7. Noch kann man aus dem vorigen Ausdruck einen algebraischen Ausdruck für die von S angerechnete Abscisse entwickeln; nämlich $x = \frac{a}{2} \dot{-} \frac{a}{2c}\sqrt{(c^2 - 4y^2)}$.

Fig. 3.

*Wenn dem Auge in T, in einer großen Ferne die schiefe Linie FM unter dem Sehewinkel MTP oder unter der Größe MP erscheint; so weiß man auch schon aus der Optik, daß sich die wahre Länge der Linie, zu ihrer scheinbaren Größe verhalte, wie der Sin. tot. zum Sin. des Winkels, welchen die wahre Linie mit der durch das Aug des Beobachters gehenden Linie bildet. Nach der Fignr ist nämlich $FM : MP = r :$ Sin. MFP. Sehen wir also einen gegen unser Aug schiefliegenden Kreis in einer hinlänglichen Entfernung; so werden sich dessen

sen Ordinaten gleichsam verkürzen, und der Kreis als eine Ellipse erscheinen, deren große Axe sich dann zur kleinen verhält, wie der Sin. tot. zum Sin. des Winkels, welchen der schiefliegende Kreis mit der bis zum Auge verlängerten Linie bildet.

§. 21. Aufgabe. Eine Gleichung für die Ellipse zu finden, inwiefern man die Abscissen vom Mittelpunkte anrechnet.

Fig. 6.

Auflösung. Es sey CP diese Abscisse, die entsprechende Ordinate PM; so wird aus $SP = x = \frac{1}{2}a - u$, und aus der Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ diese:

$$y^2 = \frac{ap}{4} - \frac{pu^2}{a} = \frac{(a^2 - 4u^2)\,p}{4a} = (\tfrac{1}{4}a^2 - u^2)\,\frac{c^2}{a^2}$$

$$(\S.\ 20.\ 3)) = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}.$$

Zusätze. 1. Die Ordinaten, die gleich weit vom Mittelpunkte abstehen, sind gleich, indem $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)\,\frac{c^2}{a^2}}$.

2. Beyde Axen theilen also die Ellipse in 4 gleiche Ausschnitte.

3. Es ist auch hier, wie §. 20. Zus. 1., $Y^2 : y^2 = \frac{1}{4}a^2 - U^2 : \frac{1}{4}a^2 - u^2$.

4. Ueber den Scheitel S oder s hinaus giebt es keine Ordinaten; denn setzt man in obiger Gleichung $u = \pm \frac{1}{2}a$, so wird $y = 0$, und $u > \frac{1}{2}a$ gesetzt, wird y^2 negativ, oder ein unmögliches Quadrat.

5. Fällt

5. Fällt man aus irgend einem Punkte M der Ellipse das Loth Mv auf die kleine Axe; so ist Mv ihre Ordinate $= y'$; $lv = x' = Cl - Cv = \frac{1}{2} c - y$, folglich $y = \frac{1}{2} c - x'$.

Eben so ist $Mv = y' = CP = CS - SP = \frac{1}{2} a - x$, folglich $x = \frac{1}{2} a - y'$. Setzt man nun diese Werthe statt x und y in der Gleichung $y^2 = \frac{c^2}{a^2} (ax - x^2)$, oder in $a^2y^2 = c^2 (ax - x^2)$; so findet man $c^2y'^2 = a^2cx' - a^2x'^2$, oder $y'^2 = \frac{a^2}{c^2} (cx' - x'^2)$, eine jener ganz ähnliche Gleichung für die kleine Axe; man kann daher aus ihr auch ähnliche Folgerungen ziehen, wie aus ersterer.

Nämlich α) $y'^2 : cx' - x'^2 = a^2 : c^2$; aber $cx' - x'^2 = x' (c - x') = lv. vL$, folglich verhält sich das Quadrat der Ordinate Mv der kleinen Axe zum Rechtecke aus den entsprechenden Abscissen, wie das Quadrat der großen Axe, zum Quadrate der kleinen Axe.

β). Da aber letzteres Verhältniß konstant ist; so verhalten sich auch die Quadrate der Ordinaten der kleinen Axe, wie die Rechtecke aus ihren entsprechenden Abscissen.

6. Also $Mv^2 : Lv. vl = Ss^2 : Ll^2$, oder, da $Lv. vl = vm^2$, $Mv^2 : mv^2 = Ss^2 : Ll^2$, oder $Mv : mv = a : c$; aber $PN : PM = a : c$ (§. 20. Zus. 6.), also auch $Mv : vm = PN : PM$.

Denkt

Denkt man sich nun mit dem Halbmesser = CL einen Kreis eingeschrieben; so wird vm Ordinate desselben, daher verhält sich die Ordinate der kleinen Axe zur entsprechenden Ordinate des eingeschriebenen Kreises, wie die Ordinate des umschriebenen Kreises zur entsprechenden Ordinate der großen Axe.

§. 22. Erklärung. Man stelle sich in F die Sonne vor, um welche ein Planet die elliptische Bahn SlsLS beschreibt; so nennt man den Abstand des Brennpunktes F vom Mittelpunkte C die Eccentricität der Ellipse. Wir bezeichnen sie mit e.

§. 23. Aufgabe. I. Den Abstand des Brennpunktes F von S, und II von C zu finden.

Auflösung. I. $FI = y = \frac{1}{2}p$, oder $y^2 = \frac{1}{4}p^2 = px - \frac{px^2}{a}$, woraus man $x = FS = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{a^2 - ap}{4}\right)}$ $= \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)}$ (§. 20. Zus. 3.) entwickelt.

II. $FS = x = SC - FC = \frac{1}{2}a - u$, daher auch $\frac{1}{2}a - u = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{a^2 - ap}{4}\right)}$, oder $u = \mp\sqrt{\left(\frac{a^2 - ap}{4}\right)} = \mp\sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{4}\right)} = FC = e$;

oder $e^2 = \frac{a^2 - ap}{4} = \frac{a^2 - c^2}{4}$.

Zu-

Zusätze. 1. Also ist auch der Parameter p der Ellipse $= a - \frac{4e^2}{a}$; ist daher $e = o$, wie beym Kreise; so ist $p = a$, oder gleich dem Durchmesser.

2. e ist um so größer, je größer der Unterschied der Axen, oder je kleiner p ist.

3. Setzt man a gegen c unendlich groß; so erhält man $u = \mp \infty$, d. i. der Mittelpunkt ist dann, wie in der Parabel, unendlich entfernt; ist aber $a = c$, oder fällt F in C; so geht die Ellipse in einen Kreis über, indem $FS = \frac{1}{2} a$ wird.

4. Die Ellipse hat 2 Brennpunkte, F, f, die vom Mittelpunkte sowohl, als von den Scheiteln S, s gleich weit abstehen.

5. Aus der Gleichung §. 20. hat man die Proportion: $y^2 : \frac{1}{4} a^2 - u^2 = c^2 : a^2 = \frac{1}{4} c^2 : \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 - e^2 : \frac{1}{4} a^2$.

§. 24. Lehrsatz. Die Summe der Radien vektoren FM, fM ist der Axe Ss gleich.

Beweis. 1) $FM^2 = FP^2 + PM^2$, aber $FP^2 = (FC - PC)^2 = (\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{4}} - u)^2$ (§. 23. II); durch wirkliche Erhebung, und durch Division und Multiplikation des zweyten Gliedes mit a, ist $FP^2 = \frac{a^2 - c^2}{4} - \frac{au\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} + u^2$. Hiezu $PM^2 = \frac{1}{4} c^2$

$\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$ (§. 21.) addirt, und die Wurzel ausgezogen, hat man $FM = \frac{a}{2} - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$.

2.) Auf dieselbe Art findet man $fM = \sqrt{(fP^2 + PM^2)}$, (indem $fP^2 = fC + CP)^2$ ist) $= \frac{a}{2} + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$. Also $FM + fM = a = Ss$.

Zusätze. 1. Hieraus findet man leicht die Werthe für die Radien vektoren. Es ist nämlich $FM^2 = FP^2 + PM^2 = (FC - PC)^2 + y^2 = (e - u)^2 + y^2$ (§. 23. II.), und $fM^2 = fP^2 + PM^2 = (fC + PC)^2 + y^2 = (e + u)^2 + y^2$, daher $fM^2 - FM^2 = 4eu = (fM + FM)(fM - FM) = a.d$ (wo d den Unterschied der Radien vektoren bezeichnet).

Da nun der größere Radius vektor $fM = \frac{a + d}{2}$ und der kleinern $FM = \frac{a - d}{2}$ (B. §. 79.); so ist durch Substitution $fM = \frac{1}{2}a + \frac{2eu}{a}$, und $FM = \frac{1}{2}a - \frac{2eu}{a}$.

2. Da $\triangle FCL \cong fCL$, so ist $FL = fL = \frac{1}{2}a = SC$, und der Einfallswinkel $FLC =$ dem Ausfallswinkel fLC; d. i. ein von F ausgehender und im Punkte L eines elliptischen Spiegels einfallender Stral, wird in den andern Brennpunkt f reflektirt.

3. Es ist $CL^2 = \frac{1}{4} c^2 = FL^2 - FC^2 = \frac{1}{4} a^2 - e^2$ $= (\frac{1}{2} a + e)(\frac{1}{2} a - e) = sF.FS$, folglich $sF : CL : FS$ d. i. die halbe kleine Axe ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Abständen des Brennpunktes F oder f von beyden Scheiteln der Ellipse.

4. Aus 3. folgt, daß auch $\frac{1}{4} c^2 = \frac{1}{4} a^2 - e^2$ sey; daher geht die Proportion §. 20. Zus. 6. in diese über: $y^2 : ax - x^2 = \frac{1}{4} a^2 - e^2 : \frac{1}{4} a^2$; oder in diese: $PM^2 : SP.Ps = SF.Fs : SC^2$.

Nennt man also F den Mittelpunkt der Kräfte (centrum virium — focus, umbilicus, polus), S, s die Apsiden (apsides) und SF. sF das Rechteck der Apsiden; so verhält sich das Quadrat der Ordinate zum Rechtecke der Abscissen, wie das Rechteck der Absiden zum Quadrate der halben großen Axe.

Fällt die Ordinate PM in F, wo $y = \frac{1}{2} p$; so hat man $\frac{1}{4} p^2 : SF.sF = FS.sF : CS^2$, oder $\frac{1}{2} p . \frac{1}{2} a = SF.sF$; also ist das Rechteck der Apsiden die mittlere Proportionallinie zwischen den Quadraten der halben großen Axe und des halben Parameters, oder jenes Rechteck gleicht dem Rechtecke aus der halben großen Axe in den halben Parameter.

5. Also

5. Also $y^2 = \frac{(ax - x^2)(\frac{1}{4}a^2 - e^2)}{\frac{1}{4}a^2}$, und $y^2 = \frac{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)(\frac{1}{4}a^2 - e^2)}{\frac{1}{4}a^2}$ (§. 23. Zus. 5.); zwey Gleichungen für die Ellipse, wenn die Excentricität und große Axe gegeben sind.

§. 25. Aufgabe. Eine Ellipse geometrisch zu beschreiben.

Auflösung. Sind die Axen gegeben; so findet man leicht die Brennpunkte, indem man die eine Zirkelspitze in L einsetzt, und mit der Apertur = SC F und f sucht (§. 24. Zus. 2.). Theilt man nun die große Axe willkührlich in mehrere Theile, und beschreibt z. B. mit dem Radius SP aus F einen Bogen, und eben so aus f mit dem Halbmesser = sP einen andern, den vorigen z. B. in M schneidenden, Bogen; so ist nach §. 24. M ein Punkt der Ellipse, u. s. w.

Anmerkung. Mechanisch löst man die Aufgabe, wenn man einen Faden, dessen Länge = a, in seinen Endpunkten bey F und f befestigt, und dann z. B. eine Bleyfeder an dem immer gleich gespannten Faden umherführt. Leichter ist dieß, wenn man in F und f 2 Stifte befestigt, um welche man an einem doppelten Faden, dessen Länge wieder = a, eine Bleyfeder umherbewegt.

Zweyter Abschnitt.

Von der Ellipse, auf die Tangenten bezogen.

Fig. 7.

§. 26. Aufgabe. Für irgend einen Punkt M der Ellipse eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe MF, Mf, und verlängere letztere bis Q, so, daß MQ = MF; so wird die den Winkel FMQ halbirende TMp die zu ziehende Tangente für M seyn.

Beweis. Jeder andere Punkt p liegt außerhalb der Ellipse, indem $fp + pQ > fQ$ (G. §. 62.) $> fM + MF > a$ ist.

Zusatz. Der Satz §. 24. Zus. 2. gilt allgemein; denn, weil der Winkel $TMQ = fMp = FMT$, so ist, wenn man NM auf MT senkrecht zieht, $NMF + FMT = NMf + fMp$, folglich $NMF = NMf$, d. i. jener Satz gilt in Beziehung auf jeden Punkt M.

§. 27. Aufgabe. Den Werth für die Subnormale NP zu finden.

Auflösung. $NP = NF - FP$. Nun ist $fQ : MQ = fF : NF$ (G. §. 112.), d. i. $a : \frac{1}{2}a - \frac{eu}{a}$ (§. 24. Zus. 1) $= 2e : NF$; also $NF = \frac{a^2e - 4e^2u}{a^2}$.

Fer-

Ferner ist $FP = FC - PC = e - u$, daher $NP = \frac{a^2e - 4e^2u}{a^2} - e + u = \frac{a^2u - 4e^2u}{a^2} = \frac{c^2u}{a^2} = \frac{pu}{a}$ (§. 23. II.) $= \frac{p}{2} - \frac{px}{a}$, oder $a : p = u : NP$, d. i. die Subnormale ist die 4te Proportionallinie zur großen Axe, zum Parameter und der vom Mittelpunkte an gerechneten Abscisse.

Zusatz. Also ist $NM = \sqrt{(PM^2 + NP^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2} + \frac{c^4u^2}{a^4})}$ (§. 21.) $= \frac{\frac{1}{2}C}{a^2}\sqrt{a^4 - 4a^2u^2 + 4c^2u^2}$) = der Werth für die Normale.

§. 28. Aufgabe. Den Werth für die Subtangente PT zu finden.

Auflösung. Da $NP : PM : PT$, oder $PT = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2} : c^2u : a^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u}$, oder, da $PT \cdot u = \frac{1}{4}a^2 - u^2$; $u^2 = (\frac{1}{2}a + u)(\frac{1}{2}a - u)$; so ist $u : \frac{1}{2}a + u = \frac{1}{2}a - u : PT$, d. i. die Subtangente ist die 4te Proportionallinie zu den 3 Abständen PC, Ps, PS der Ordinate.

Zusätze. 1. Also ist $TM = \sqrt{(PM^2 + PT^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2} + \frac{a^4 - 8a^2u^2 + 16u^4}{16u^2})}$ der algebraische Werth für die Tangente.

2. Der

2. Der Abstand des Mittelpunktes C vom Punkte T bestimmt sich aus der Proportion: $u : \frac{1}{2} a : CT$, indem $CT = PT + CP = \frac{\frac{1}{4} a^2 - u^2}{u} + u = \frac{\frac{1}{4} a^2}{u}$, oder $CT . u = \frac{1}{2} a . \frac{1}{2} a$.

3. Der Abstand des Scheitels S von T bestimmt sich aus der Proportion: $u : \frac{1}{2} a - u = \frac{1}{2} a : ST$; denn $ST = CT - CS = \frac{\frac{1}{4} a^2}{u} - \frac{a}{2} = \frac{\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{2} au}{u}$ etc.

4. $PT : PM = CT : Cp$, oder $\frac{\frac{1}{4} a^2 - u^2}{u} : y = \frac{\frac{1}{4} a^2}{u} : Cp$. Setzt man hier a = der halben Axe, eben so c, und bezieht die Coordinaten auf die kleine Axe, wie §. 21. Zus. 5; so geht obige Proportion, wenn man die Abscisse vom Mittelpunkte anrechnet, folglich mit u' bezeichnet, in diese über: $\frac{a^2 - y'^2}{y'} : u' = \frac{a^2}{y'} : Cp$. Substituirt man für y'^2 den in jenem Zus. gesetzten Werth, wobey nur zu bemerken ist, daß bey Berücksichtigung der halben kleinen Axe und der auf den Mittelpunkt bezogenen Abscisse Cv das dortige $cx' - x'^2 =$ lv. vL durch $c^2 - u'^2$ ausgedrückt werden müsse (wie leicht erhellt); so hat man $a^2 - \frac{a^2}{c^2}(c^2 - u'^2) : u' = \frac{a^2}{y'} : Cp$. Also $Cp = \frac{c^2}{u'}$, oder $u' : c : Cp$, d. i. der Abstand des Zusammenstoßungspunktes der Tan-

Tangente mit der kleinen Axe vom Mittelpunkte ist die dritte Proportionallinie zur Abscisse, vom Mittelpunkte angerechnet, und der halben kleinen Axe.

5. Daher ist lp, der Abstand des Zusammenstoßungspunktes vom Scheitel l der kleinen Axe, $= Cp - Cl = \frac{c^2 - cu'}{u'}$, oder $lp . u' = (c - u') u'$, d. i. $u' : c - u' (vl) = c : lp$.

6. Denkt man sich also die Tangente für S oder s gezogen, so wird, weil die Ordinate $PM = Cv = u'$ im Scheitel der Curve verschwindet, $Cp = \frac{c^2}{0} = \infty$; d. i. eine solche Tangente kann nicht mit der kleinen Axe zusammenstoßen, ist folglich dieser parallel, und auf die große Axe senkrecht.

Da nun die Lage der Ordinaten von der Lage der Tangenten abhängt, diese aber, auf S oder s gezogen, senkrecht auf a ist, so wie auch die Tangente tL senkrecht ist auf c; so folgt, daß, wie wir bisher annahmen, die Ordinaten sowohl auf die große, als kleine Axe der Ellipse lothrecht seyn müssen.

Dritter Abschnitt.

Von der Ellipse, auf die Durchmesser bezogen.

Fig. 8.

§. 29. Lehrsatz. Jeder Durchmesser AB der Ellipse wird im Mittelpunkte C halbirt.

Beweis. Es sey AC der halbe Durchmesser; man ziehe die Ordinate AG, und mache Cg = CG; ziehe die Ordinate gB und die gerade Linie BC; so sind die Dreyecke ACG, BCg kongruent, indem auch Bg = AG (§. 20. Zus. 1.) daher die Winkel bey C gleich, folglich AB eine einzige gerade Linie, oder der Durchmesser, und AC = CB.

Zusatz. Also ist der Mittelpunkt der Ellipse der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt irgend 2 zugeordneter Durchmesser.

§. 30. Erklärungen.

1. Der Durchmesser DE, welcher den Ordinaten, oder der durch den Anfangspunkt A des Durchmessers AB gezogenen Tangente AT parallel ist, heißt der bey- oder zugeordnete Durchmesser (diameter conjugata); oder man kann auch AB als solchen in Beziehung auf DE betrachten; oder AB und DE sind überhaupt zugeordnete Durchmesser.

2. Ordinate des Durchmessers ist jede auf diesen mit dem zugeordneten Durchmesser parallel gezogene Linie, wie

RV,

RV, und die entsprechenden Abscissen sind die Theile DR, RE aus dem Durchmesser DE.

§. 31. Lehrsatz. Zieht man von den Endpunkten A, D der zugeordneten Durchmesser AB, DE Ordinaten auf die große Axe; so ist das Quadrat einer Abscisse z. B. CG, vom Mittelpunkte angerechnet, gleich dem Rechtecke der Abscissen, welche der andern Ordinate DP entsprechen, nämlich $CG^2 = SP. Ps$.

Beweis. 1) $SP = SC - CP = \frac{1}{2}a - u$, und $sP = \frac{1}{2}a + u$, daher $SP. Ps = \frac{1}{4}a^2 - u^2$. Eben so ist, wenn man $CG = x$ setzt, $SG. Gs = \frac{1}{4}a^2 - x^2$. Also sind diese Rechtecke, oder nach §. 20. Zus. 1. und §. 21. Zus. 3. die Quadrate der Ordinaten DP, AG, d. i. $DP^2 : AG^2$, wie $\frac{1}{4}a^2 - u^2 : \frac{1}{4}a^2 - x^2$.

2) Aber wegen $\triangle DPt \backsim \triangle AGC$ (weil auch die innern Wechselwinkel o, i gleich sind) ist $DP^2 : AG^2 = tP^2 : GC^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2 : \frac{1}{4}a^2 - x^2 = \left(\frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u}\right)^2 : x^2$ (§. 28.). Aus diesen letzten Verhältnißen entwickelt man $x^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$, d. i. $CG^2 = SP. Ps$. Auf dieselbe Art beweist man auch, daß $CP^2 = SG. Gs$ sey.

Zusätze 1. $CG^2 : CP^2 = SP. Ps : SG. Gs = DP^2 : AG^2$; daher $CG. AG = CP. DP$; d. i. die Flächenräume sowohl der Dreyecke CAG, CPD, als der Rechtecke sind gleich.

2. Wenn AB = DE; so ist auch CG = CP, oder $u^2 = x^2$, daher $u^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2 = \frac{1}{8}a^2$, oder $\frac{1}{2}a : u : \frac{1}{4}a$, ein Ausdruck für die vom Mittelpunkte angerechnete Abscisse.

3. Zieht man das Loth DN und verlängert CL bis an die Tangente; so ist auch △ DNQ ähnlich den unter 2) genannten, folglich

CA : QD = CG : ND oder CP, und

CA : Dt = CG : Pt.

Daher $CA^2 : QD.\ Dt = CG^2 : CP.\ Pt = CG^2 : u.\ \frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u}$, oder: $(\frac{1}{2}a - u).(\frac{1}{2}a + u)$, d. i. SP.

Ps. Aber diesem Rechtecke ist CG^2 gleich, also das letzte Verhältniß ein Verhältniß der Gleichheit, folglich auch $CA^2 = QD.\ Dt$, oder QD : CA : Dt. Diese Proportion dient, bey gegebenen Durchmessern AB, DE, die Axen zu finden.

4. Da $CP^2 + CG^2 = u^2 + \frac{1}{4}a^2 - u^2 = \frac{1}{4}a^2$; so ist die Summe der Quadrate der den zugeordneten Durchmessern entsprechenden Abscissen eine konstante Größe. Daß dieß auch von der Summe der Quadraten der Durchmesser selbst wahr sey, erhellt aus folg. §.

§. 32. Lehrsatz. Die Summe der Quadrate jeder 2 zugeordneten Durchmesser gleicht der Summe der Quadrate jeder 2 andern zugeordneten Durchmesser derselben Ellipse.

Beweis. $CA^2 = CG^2 + GA^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2 + GA^2$ (§. 31.). Aber nach §. 20. Zus. 6. ist $a^2 : c^2 = SG$.

$= SG. Gs : GA^2 = CP^2 (u^2) : GA^2$ (§. 31.); daher

$$GA^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2},$$

folglich $CA^2 = \frac{1}{4} a^2 - u^2 + \frac{c^2 u^2}{a^2}$;

Ferner $CD^2 = CP^2 + PD^2 = u^2 + \frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2}$

(§. 21.); also $CA^2 + CD^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} c^2$, oder $4 CA^2 + 4 CD^2 = a^2 + c^2$. Nun ist diese Summe beständig, als auch die Summe der Quadrate der zugeordneten Durchmesser.

§. 33. Lehrsatz. Das Quadrat jeder Ordinate des Durchmessers DE verhält sich zum Rechtecke aus den entsprechenden Abscissen, wie das Quadrat des zugeordneten halben Durchmessers AB zum Quadrat jenes halben Durchmessers; d. i.

$$RV^2 : DR. RE = AC^2 : CD^2.$$

Beweis. Man ziehe die Ordinate VH, und aus R die Lothe RK, RO. Setzt man $HO = KR = m$; $CO = n$ und $CD = d$; so hat man $SH = \frac{1}{2} a + m - n$, und $sH = \frac{1}{2} a - m + n$, daher $SH. sH = \frac{1}{4} a^2 - m^2 - n^2 + 2mn$. Nun ist

1) $\triangle RVK \sim \triangle CAG$ (weil in den ähnlichen Dreyecken GAC, CHx der W. $CxH = A = V$), daher

$$RK^2 : CG^2 = RV^2 : AC^2.$$

Könnte man nun die Gültigkeit der Proportion $RK^2 : CG^2 = DR. RE : CD^2$ beweisen; so wäre der Satz bewiesen.

2) Man

2) Man suche also die Werthe der Glieder dieser Analogie: a) $HV^2 = (HK + KV)^2 = OR + KV)^2$; aber in den ähnlichen Drey. DPC, ROC ist CP: CO $= PD: OR$, oder $u : n = y : OR$, also $OR = \frac{ny}{u}$; — und in den ähnlichen Drey. RVR, PDt (indem A $= D = V$) ist $tP : KR = PD : KV$, oder $\frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u} : m = y : KV$, also $KV = \frac{muy}{\frac{1}{4}a^2 - u^2}$, und

$$HV^2 = \left(\frac{ny}{u} + \frac{muy}{\frac{1}{4}a^2 - u^2}\right)^2 = \frac{n^2y^2}{u^2} + \frac{2mny^2}{\frac{1}{4}a^2 - u^2} + \frac{m^2u^2y^2}{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)^2}.$$

Aber auch $HV^2 : PD^2 = SH.\ sH : SP.\ sP$ oder $HV^2 : y^2 = \frac{1}{4}a^2 - m^2 - n^2 + 2mn : \frac{1}{4}a^2 - u^2$, also $HV^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2y^2 - m^2y^2 - n^2y^2 + 2mny^2}{\frac{1}{4}a^2 - u^2}$.

Stellt man nun beyde Werthe von HV^2 einander gleich und entwickelt daraus $m^2 = RK^2$; so findet man

$$RK^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2u^2 - u^4 - \frac{1}{4}a^2n^2 + n^2u^2}{u^2}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u^2}\right)u^2 - n^2\left(\frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u^2}\right) = \left(\frac{u^2 - n^2}{u^2}\right).$$

$$(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2).$$

b) $CG^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$.

c) $CP : CD = CO : CR$, daher $CR = \frac{dn}{u}$. Nun ist $DR = DC - CR = d - \frac{dn}{u}$, und $RE = CE +$ $CR = d + \frac{dn}{u}$, also $DR.\ RE = d^2 - \frac{d^2n^2}{u^2}$,

d)

d) $CD^2 = d^2$.

Setzt man nun diese Werthe statt der Glieder der obigen Proportion; so erhellt die Gültigkeit dieser Proportion aus der Gleichheit des Exponenten beyder Verhältniße. Also ꝛc.

Zusatz. Zieht man die Ordinate IV auf den Durchmesser AB; so ist, da das Verhältniß $AC^2 : CD^2$ konstant ist, $RV^2 : IV^2 = DR. RE : AI. IB$, d. i. auch in Beziehung auf die Durchmesser verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die Rechtecke aus den entsprechenden Abscissen. Bezieht man daher die Ellipse auf die Durchmesser, so findet man dieselbe Eigenschaften, welche ihr, auf die Axen bezogen, zukommen, mit dem einzigen Unterschiede, daß die Ordinaten der Axen auf diese senkrecht sind, nicht so die Ordinaten der Durchmesser.

Wenn man z. B. $RV = y'$, $DR = x'$, $DE = a'$, $AB = c'$ setzt; so ist

$$y'^2 : a'x' - x'^2 = c'^2 : a'^2, \text{ oder } y'^2 = \frac{c'x}{a'} - \frac{c'^2 x'^2}{a'^2}$$

(vergl. §. 20. Zus. 6.). Oder die Abscissen vom Mittelpunkte an gerechnet, hat man

$$y'^2 = \tfrac{1}{4} c'^2 - \frac{c'^2 u'^2}{a'^2} \text{ (vergl. §. 21.).}$$

Und da auch der Parameter p' für irgend einen Durchmesser DE die dritte Proportionallinie zu DE und dem zuge-

zugeordneten Durchmesser AB, oder $p' = \frac{c'^2}{a'}$ ist; so hat man auch hier:

$$y'^2 = p'x' - \frac{p'x'^2}{a'}, \text{ und daher}$$

$$p : p' = \frac{c^2}{a} : \frac{c'^2}{a'}.$$

§. 34. Lehrsatz. Das Parallelogramm unter den zugeordneten Durchmessern ist gleich dem Rechtecke aus beyden Axen.

Beweis. Mit der verlängerten Normale Dn ziehe man parallel CW; weil nun $\triangle$ DPn $\backsim$ $\triangle$ WCQ (indem der W. PDC = DCQ, der Theil nDC = WCD, folglich auch die 2 andern Theile gleich sind); so ist CW (= MD): CQ = PD (= CN): Dn, daher MD. Dn = CQ. CN = c^2 (§. 28. Zus. 4. wo c die halbe kleine Axe bezeichnet, daher) = $\frac{1}{4}c^2$; folglich $MD^2 : \frac{1}{4}c^2 : Dn^2$, oder: $\frac{\frac{1}{4}c^2a^4 - a^2c^2u^2 + c^4u^2}{a^4}$ (§. 27. Zus.); also $MD^2 + AC^2 = \frac{\frac{1}{16}c^2a^4}{\frac{1}{4}a^4 - a^2u^2 + c^2u^2}$ X $\frac{\frac{1}{4}a^4 - a^2u^2 + c^2u^2}{a^2}$ (§. 32.) = $\frac{1}{16}c^2a^2$; daher $MD^2 : \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}c^2 : AC^2$, oder MD. AC = $\frac{1}{2}a$. $\frac{1}{2}c$. Aber AC ist die Grundseite, und MD die Höhe des Paralelogramms unter den halben beygeordneten Durchmessern CD, AC, also ist dieses Parallelogramm gleich dem Rechtecke aus den halben Axen, also ꝛc.

Zusatz.

Zusatz. Es sind daher die Flächenräume der Parallelogramme unter je 2 beygeordneten Durchmessern einander selbst gleich.

Fig. 7.

§. 35. Lehrsatz. Der zwischen dem Berührungspunkte I und dem beygeordneten Durchmesser AB liegende Theil IE des Radius vektor If gleicht der halben großen Axe.

Beweis. Man ziehe durch den andern Brennpunkt F Hn ‖ IE, verlängere die gezogene IF zum Durchmesser AB; so ist

1) △ fEC ≅ △ CnF, weil nebst fC = FC (§. 23. Zus. 4.) die Winkel sowohl bey C, als bey f und F (als innere Wechselwinkel) gleich sind. Daher auch fE = Fn.

2) Das △ FHI ist gleichschenklig. Denn der W. FHI = EIq = FIH (so wie fMp = TMQ), folglich FI = FH.

3) Auch das △ FAn ist gleichschenklig, weil A = AIH und n = dem andern, jenem gleichen, Winkel nHI, daher Fn = FA.

4) Nun ist FI + fI = a (§. 24.) = FH + fE + EI = FH + Fn + EI = nH + nH, d. i. 2nH = a, oder EI = nH = ½ a.

Zusatz.

Zusatz. Zieht man auf den Radius vektor FI das Loth rK aus dem einen Endpunkte der Normale Ir, und verlängert diese bis zum beygeordneten Durchmesser; so sind die △△ rKI und uAI ähnlich, sohin KI : Ir = Iu : IA, also KI . IA = Ir . Iu.

Aber weil im △ AEI der W. E = EIq = AIH = A, folglich EI = IA = ½ a; und da, wie im §. 34 MD. Dn nach Fig. 8., so auch hier Ir . Iu = ¼ c² = ¼ ap (§. 20 Zus. 3.) ist: so hat man KI . ½ a = ¼ ap = ½ a . ½ p, also KI = ½ p, d. i. der Theil des Radius vektor, welcher zwischen dem Zusammenstoßungspunkte I und jenem Lothe liegt, gleicht dem halben Parameter.

Drit-

Drittes Hauptstück.

Von der Hyperbel.

Erster Abschnitt.

Von der Hyperbel, auf die Axen bezogen.

Fig. 9.

§. 36. Aufgabe. Es sey der Kegelschnitt, wodurch die Hyperbel entsteht, gegeben, man soll zwischen den Ordinaten und Abscissen, diese vom Scheitel der Hyperbel angerechnet, und auf die Hauptaxe bezogen, eine Gleichung für diese Curve finden.

Auflösung. Denkt man sich noch einen senkrechten Kegel Abc mit seiner Spitze auf die des Kegels ABC gesetzt; so wird die diesen schneidende Ebene auch jenem begegnen und schneiden, wodurch also eine zweyte zugehörige Hyperbel entsteht. Das Uebrige der Fig. ist, wie bey der Konstruktion Figg. 2. 5., nämlich Ss die Axe = a, SP, sp ihre Verlängerungen; SP die Abscisse = x, PM die zugehörige Ordinate = y; nun ist, wie oben $PM^2 = y^2 = BP.PC$; aber in den ähnlichen

lichen Drey. BsP, DsS ist $BP : DS = sP : Ss$, woraus $BP = \frac{(a+x)\,DS}{a}$. In den ähnl. Drey. SPC, Sds ist $PC : ds = SP : Ss$, woraus $PC = \frac{x.\,ds}{a}$, folglich $y^2 = \frac{ax+x^2}{a} \cdot \frac{DS.\,ds}{a} = px + \frac{px^2}{a}$, wenn man aus demselben Grunde, wie oben, $\frac{DS.\,ds}{Ss} = p$ setzt.

Zusätze, die Haupteigenschaften der Hyperbel enthaltend.

1. Da $y^2 : (a+x)\,x = p : a$, oder $PM^2 : sP$. $PS = p : Ss$, oder $PM^2 : (sS + SP)$. $SP = p : Ss$; so verhält sich das Quadrat jeder Ordinate der Hyperbel zum Rechtecke aus der Abscisse in die gerade, aus der Hauptaxe und der Abscisse zusammengesetzte, Linie (welches Rechteck wir kurz das Rechteck aus den Abscissen nennen), wie der Parameter zur Hauptaxe.

2. Weil dieses aber ein konstantes Verhältniß ist; so verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die Rechtecke aus den entsprechenden Abscissen.

Daher sind die Ordinaten, die auf beyden Seiten gleichweit vom Scheitel abstehen, gleich.

3. Die Hyperbel ist eine in sich nicht zurückekehrende Curve, sondern ihre Aeste laufen

ins

ins Unendliche aus. Denn so groß man auch immer x in der Gleichung annehmen mag; so bleibt doch der Werth für das Quadrat der Ordinate positiv. — Weil ferner $y = \pm \sqrt{(px + \frac{px^2}{a})}$; so sind jene Aeste auf beyden Seiten der Hauptaxe gleich.

4. In der Hyperbel ist das Quadrat jeder Ordinate größer, in der Ellipse kleiner, als das Rechteck aus dem Parameter in die Abscisse; dieses ist aber in der Parabel jenem Quadrate gleich.

5. Setzt man $a = \infty$; so erhält man die Gleichung für die Parabel, d. i. die Hyperbel geht in eine Parabel über. Man kann also diese sowohl wie eine Ellipse, als wie eine Hyperbel behandeln, deren Axe unendlich ist.

6. Da die auf der konvexen Seite der Figur liegende Axe der Hyperbel eine der Axe der Ellipse entgegengesetzte Lage hat; so kann man die Hyperbel wie eine Ellipse, deren Axe aber negativ ist, behandeln, indem unter dieser Voraussetzung die Gleichung für die Ellipse in die für die Hyperbel sich verwandelt.

7. Auch erhellt aus der Gleichung, daß man für die Hauptaxe Ss keine Ordinaten habe, wenn nicht die Abscisse z. B. Se, welche man von S gegen s zu, also in entgegengesetzter Richtung mit SP nimmt (daher $= -x$ ist), größer Ss oder $> a$ wird. Denn setzt man $-x = \frac{1}{2}a$, oder $= a$, wo dann $x = -\frac{1}{2}a$, oder $= -a$ ist,

a ist, und substituirt diese Werthe in der Gleichung für y; so findet man im ersten Falle für die Ordinate eine imaginäre Größe, im zweyten 0. — Aber ist $-x > a$, z. B. $= a + z$, daher $x = -(a + z)$; so wird

$$y^2 = -(a + z)\,p + \frac{(a+z)^2\,p}{a} = pz + \frac{pz^2}{a},$$

oder wenn man wieder $z = x$ setzt, erhält man dieselbe ursprüngliche Gleichung.

Woraus deutlich ist, daß über den Scheitel s der Hauptaxe wieder Ordinaten, wie vorhin, statt finden, folglich eine der vorigen Hyperbel ähnliche und gleiche Hyperbel entstehen müsse, so, daß diese entgegengesetzten Hyperbeln eigentlich nur eine Figur zusammen bilden.

8. Ss: DS = ds: p; aber auch die mit sd durch den Punkt e der der Linie SD gleichen Linie Se gezogene p′e ist in den ähnlichen Dreyecken Ssd, p′eS die 4te Proportionale zu jenen drey ersten; daher p′e = dem Parameter der Hyperbel.

Eben so findet man den Parameter der Ellipse = pe (Fig. 5.); und für die Parabel (Fig. 2.) ist AD: SD: p (§. 5.). Macht man nun auf der Seite AC Ae = SD und zieht ep || SD oder CB; so hat man auch AD: SD = Ae: ep, d. i. ep als Parameter für die Parabel. Ist also der Kegel und die Neigung des Schnitts zu jenes Grundfläche gegeben; so ist auch allzeit der Parameter der Hauptaxe mit gegeben.

Fig. 10.

§. 37. Erklärungen.

1. Der Mittelpunkt C der die beyden Scheitel s,S der entgegengesetzten Hyperbeln jungirenden Linie heißt Mittelpunkt der Hyperbel.

2. Die durch C auf die Hauptaxe Ss lothrecht gezogene Linie $Ll = c$, welche zugleich die mittlere Proportionale zwischen der großen Axe und dem Parameter ist, heißt die kleine Axe.

Zusätze. 1. Also ist auch für die Hyperbel $c^2 = ap$, oder $a : c : p$, und $p = \frac{c^2}{a}$.

2. Setzt man daher statt p den Werth in der im §. 36. gefundenen Gleichung; so hat man $y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)$, eine Gleichung für die Hyperbel, auf beide Axen bezogen; und daraus hat man $y = \frac{c}{a}\sqrt{(ax + x^2)}$.

Hieraus folgt: α) wenn $a = c$, so wird $y^2 = ax + x^2$, eine Gleichung für die Hyperbel, die man gleichseitig nennt (hyperbola aequilatera); ist $c = 0$; so wird auch $\pm y = 0$, d. i. die Hyperbel wird unendlich enge, und fällt mit der Hauptaxe zusammen; ist aber $a = 0$; so wird $y^2 = \infty$, und aus $Y^2 : y^2 = aX + X^2 : ax + x^2$ wird $Y : y = X : x$; d. i. die Hyperbel verwandelt sich in eine auf Ss lothrechte

Linie,

Linie, und man hat unter dieser Voraussetzung ein geradliniges Dreyeck.

β). Aus jener Gleichung folgt die Proportion: $y^2 : ax + x^2 = c^2 : a^2 = \frac{1}{4}c^2 : \frac{1}{4}a^2$, oder $PM^2 : SP.Ps = Ll^2 : Ss^2 = CL^2 : CS^2$.

§. 38. Aufgabe. Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden, indem man die Abscissen vom Mittelpunkte C anrechnet.

Auflösung. Die der Ordinate $PM = y$ entsprechenden Abscissen seyen $SP = x$ und $CP = u$, daher $x = CP - CS = u - \frac{1}{2}a$, und $x^2 = u^2 - au + \frac{1}{4}a^2$. Also geht die Gleichung im §. 36. in diese über:

$$y^2 = \frac{pu^2}{a} - \frac{1}{4}ap, \text{ oder} = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2 \quad (\text{§. 37. Zus. 1.}) = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - \frac{1}{4}a^2).$$

Zusätze. 1. Also $y^2 : u^2 - \frac{1}{4}a^2 = c^2 : a^2 = PM^2 : SP.Ps$ (§. 37. Zus. 2. β)), oder $y^2 : (u - \frac{1}{2}a).(u + \frac{1}{2}a) = PM^2 : SP.Ps$, oder: $CP^2 - CS^2$ (ex hyp.) d. i. (weil $c^2 : a^2$ ein konstantes Verhältniß ist,) es verhalten sich in Beziehung auf die große Axe die Quadrate der Ordinaten, wie die Rechtecke aus den entsprechenden Abscissen, oder wie die Unterschiede der Quadrate der Abscisse, vom Mittelpunkte angerechnet, und der halben großen Axe.

2. Aus

2. Aus unserer Gleichung hat man folgende für die Abscisse u, nämlich $u^2 = \frac{a^2}{c^2}(y^2 + \frac{1}{4}c^2)$, daher $u^2 : y^2 + \frac{1}{4}c^2 = a^2 : c^2 = CP^2 : PM^2 + CL^2$, oder die Quadrate der Abscissen, vom Mittelpunkte angerechnet, verhalten sich, wie die Summen der Quadrate der entsprechenden Ordinate und der halben kleinen Axe.

3. Setzt man $u = \infty$, so wird $y = \frac{c}{a}\sqrt{\infty^2} - \frac{1}{4}a^2 = \frac{c\infty}{a}$, d. i. auch die Ordinate wird unendlich.

4. Will man eine Gleichung für die Hyperbel, so fern sie auf die kleine Axe Ll bezogen wird; so sey z. B. für den Punkt m′ der Curve das Loth m′i die Ordinate $= y'$ der kleinen Axe, und das Loth m′p auf die große Axe sey, wie oben, $= y$. Es ist also $il = x'$ d. i. die Abscisse der kleinen Axe, und $pS = x$; $m'i = Cp = \frac{1}{2}a + x$, daher $x = y' - \frac{1}{2}a$; $Ci = m'p = Cl - il = y = \frac{1}{2}c - x'$.

Substituirt man nun diese Werthe in der Gleichung $y^2 = \frac{a^2}{c^2}(ax + x^2)$, oder in $c^2y^2 = a^2(ax + x^2)$; so erhält man $y'^2 = \frac{a^2}{c^2}(\frac{1}{2}c^2 - cx' + x'^2)$.

Man findet also, anders, als bey der Ellipse, nicht dieselbe Gleichung für die Hyperbel, auf die kleine Axe bezogen.

Rechnet man aber die Abscissen vom Mittelpunkte an; so ist unter derselben Voraussetzung, wie vorhin, nun $Ci = u' = \frac{1}{2}c - x'$, folglich $x' = \frac{1}{2}c - u'$; substituirt man diesen Werth in der vorhin für y'^2 gefundenen Gleichung; so erhält man $y'^2 = \frac{a^2}{c^2}(u'^2 + \frac{1}{4}c^2)$, und $u'^2 = \frac{c^2}{a^2}(y'^2 - \frac{1}{4}a^2)$. Ferner ist $y'^2 : u'^2 + \frac{1}{4}c^2 = a^2 : c^2$, oder da letzteres Verhältniß beständig ist, so verhalten sich die Quadrate der Ordinaten der kleinen Axe, wie die Summen der Quadrate der Abscisse (vom Mittelpunkte angerechnet) und der halben kleinen Axe.

§. 39. Aufgabe. I. Den Abstand des Brennpunktes F vom Scheitel S; II. vom Mittelpunkte, oder die Eccentricität $= e$ zu finden.

Auflösung. I. Nach §. 4. 2) ist hier $F\mu = y = \frac{1}{2}p$, daher $\frac{1}{4}p^2 = px + \frac{px^2}{a}$, oder $\frac{1}{4}ap = ax + x^2$. Hieraus entwickelt man nach Grundsätzen der Analysis (B. §. 69).

$$x = FS = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{ap + a^2}{4}\right)}.$$

$$\text{II. } e = CF = CS + SF = \pm\sqrt{\left(\frac{ap + a^2}{4}\right)},$$

$$\text{oder } e^2 = \frac{ap + a^2}{4} = \frac{c^2 + a^2}{4} \text{ (§. 37. Zus. 1.)} =$$

$$CL^2 + CS^2.$$

Zu-

Zusätze. 1. Die Brennpunkte der entgegengesetzten Hyperbeln stehen gleichweit vom Mittelpunkte und vom Scheitel ab, und die Eccentricität der Hyperbel ist um so größer, je größer die Axen und der Parameter sind.

2. Da $SL^2 = CL^2 + CS^2 = e^2 = CF^2$, oder $SL = CF$; so kann man bey gegebenen Brennpunkten die Endpunkte L, l der kleinen Axe finden; und umgekehrt: sind die Axen gegeben, so kann man, indem man $CF = SL$ etc. macht, F und f finden.

3. $2FC = Ff$, daher $4FC^2 = Ff^2 = 4CL^2 + 4CS^2$, oder $Ff^2 = Ll^2 + Ss^2$, d. i. der Abstand Ff der Brennpunkte voneinander gleicht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreyecks, dessen Katheten die Axen sind.

§. 40. Aufgabe. Die Werthe für die Radien vektoren zu finden.

Auflösung. $fM^2 = fP^2 + PM^2 = (CP + Cf)^2 + PM^2 = (u + e)^2 + y^2 = u^2 + 2eu + e^2 + y^2$; daher durch Subst. für e^2 und y^2

$$fM^2 = u^2 + 2eu + \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{4}c^2 + \frac{c^2u^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2u^2 + c^2u^2 + 2a^2eu}{a^2} + \frac{a^2}{4}$$

$$= (a^2 + c^2)\frac{u^2}{a^2} + \frac{2aeu}{a} + \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{4e^2u^2}{a^2} + \frac{2aeu}{a} + \frac{a^2}{4} \text{ (§. 39. II.)}$$

und $fM = \frac{2eu}{a} + \frac{a}{2} = \frac{Ff.\,CP}{Ss} + CS = \frac{CF.\,CP}{CS} + CS.$

Eben so findet man aus $FM^2 = FP^2 + PM^2 = (u - e)^2 + y^2$

$$FM = \frac{2eu}{a} - \frac{a}{2} = \frac{Ff.\,CP}{Ss} - CS = \frac{FC.\,CP}{CS} - CS.$$

Zusätze. 1. Also gleicht der Unterschied zweyer Radien vektoren der großen Axe.

2. Da $u = CP = SP + CS = x + \frac{1}{2}a$; so ist $fM = \frac{2ex}{a} + e + \frac{a}{2}$, und $FM = \frac{2ex}{a} + e - \frac{a}{2}$; algebraische Ausdrücke für die Radien vectoren in der Abscisse vom Scheitel angerechnet, der Eccentricität und großen Axe.

3. Da $CL^2 = \frac{1}{4}c^2 = e^2 - \frac{1}{4}a^2 = (e - \frac{1}{2}a)(e + \frac{1}{2}a) = (CF - CS)(CF + CS) = FS.\,sF$; so hat man statt der Proportion §. 37. β) diese;

$$y^2 : ax + x^2 = e^2 - \tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}a^2$$

oder $PM^2 : PS.\,sP = FS.\,sF : CS^2$.

Geht die Ordinate durch F, wo folglich $y^2 = \frac{1}{4}p^2$; $x = e - \frac{1}{2}a$; daher $x + a = e + \frac{1}{2}a$, und $ax + x^2 = e^2 - \frac{1}{4}a^2$ ist; so erhält man

$$\tfrac{1}{4}p^2 : e^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = e^2 - \tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}a^2.$$

Also gelten von der Hyperbel dieselben Sätze, welche wir von der Ellipse im §. 24. Zus. 4. bewiesen haben, näm-

nämlich das Rechteck der Apsiden ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Quadraten der halben großen Axe und des halben Parameters; oder, weil vermöge der vorigen Proportion $\frac{1}{2}$ p. $\frac{1}{2}$ a $=$ $e^2 - \frac{1}{4}a^2$, das Rechteck der Apsiden gleicht dem Rechtecke aus der halben großen Axe in den halben Parameter.

Ferner ist $y^2 = \frac{(ax + x^2)\ (e^2 - \frac{1}{4}a^2)}{\frac{1}{4}a^2}$

und $y^2 = \frac{(u^2 - \frac{1}{4}a^2)\ (e^2 - \frac{1}{4}a^2)}{\frac{1}{4}a^2}$ (§. 38. Zus. 1.).

Zwey analoge Gleichungen mit jenen im §. 24. Zus. 5. für die Ellipse.

Anmerkung. Wenn man die Kegelschnitte als Curven betrachtet, durch die stetige Bewegung eines Punktes M bey einem gewissen Abstande vom Brennpunkte F entstanden; so werden die Radien vektoren veränderliche Ordinaten, welche von demselben Punkte F ausgehen, aber unter verschiedenen Winkeln (den Polarwinkeln) sich zur Hauptaxe der Curve neigen. Die unter dieser Voraussetzung gesuchte Gleichung heißt Polargleichung (aequatio polaris).

Diese ist für die Hyperbel $FM (= q) = \frac{4e^2 - a^2}{2a + 4e.\ \text{cos.}\ \varphi'}$

und daher für die Ellipse, wo $q = \frac{a^2 - 4eu}{2a}$ (§. 24. Zus. 1.), $q = \frac{a^2 - 4e^2}{2a - 4e.\ \text{cos.}\ \varphi}$, wo φ den Polarwinkel MFP bezeichnet. Nämlich im rechtwinkligen $\triangle$ FMP ist FM : FP = Sin. tot. (= 1) : cos. φ, daher FP $= q$.

$= q.\ \text{cos.}\ \varphi$; aber $CP = u = CF \pm FP$ (je nachdem der Punkt M mehr oder weniger sich von S entfernt) $=$ $e \pm q.\ \text{cos.}\ \varphi$, also diesen Werth in $q = \frac{4eu - a^2}{2a}$ (§. 40.) substituirt, erhält man obige Gleichung.

§. 41. Aufgabe. Es seyen die Axen der Hyperbel gegeben, oder willkührlich angenommen, man soll diese Curve geometrisch beschreiben.

Fig. 11.

Auflösung. Ueber der verlängerten großen Axe Ss beschreibe man aus C mehrere concentrische Kreislinien; errichte vom Punkte s aus die Lothe sN, sN′ etc., und suche zu den Axen und einem dieser Lothe die 4te Proportionallinie PM, PM′...; so sind M, M′ Punkte der Hyperbel.

Beweis. $Ss^2 : Ll^2 = sP.\ PS : PM^2$ (§. 37. Zus. 2. β)). Aber $sN^2 = sP.\ sp = sP.\ PS$, folglich durch Substitution und Wurzelausziehung $Ss : Ll = sN : PM$, u. s. w.

Fig. 10.

Zusatz. Wäre die große Axe und der Parameter gegeben; so fände man daraus die kleine Axe (§. 37. Zus. 1.). Wären ferner nebst der großen Axe auch die Brennpunkte gegeben; so fände man dadurch, daß man aus S mit dem Halbmesser CF einen Bogen beschriebe, welcher das Loth Ll in einem Punkte L schnitte, — die

klei-

kleine Axe (§. 39. Zus. 2.). In beyden Fällen könnte man daher die Hyperbel geometrisch beschreiben.

Im zweyten Falle kann man dieß auch auf folgende Weise leisten: Man nehme auf der verlängerten Axe einen Theil sr, welcher > sF, und beschreibe mit ihm, als Halbmesser, aus f einen Bogen, welcher von einem andern aus F mit Sr beschriebenen Bogen im Punkte M, einem gesuchten Punkte der Hyperbel, geschnitten wird.

Mechanisch und durch stetige Bewegung kann man auf dieselbe Art die Hyperbel beschreiben, wenn man in F und f 2 Stifte befestigt. Um f bewege sich ein Linial fMQ, welches um Ss länger ist, als der in F befestigte Faden FMQ, dessen anderes Ende im Endpunkte Q des Linials befestigt ist. Drückt man nun, während man an f das Linial hin und her bewegt, eine Bleyfeder wohl am Faden und am Liniale an; so wird sie eine Hyperbel MSm beschreiben, indem bey diesem Mechanismus fM + MQ = FM + MQ + Ss, d. i. fM — FM = Ss ist.

Zweyter Abschnitt.

Von der Hyperbel, auf die Tangente bezogen.

§. 42. Aufgabe. Für einen gegebenen Punkt M der Hyperbel eine Tangente zu ziehen.

Auf-

Auflösung. Man ziehe FM, fM und halbire den von diesen Radien vektoren an M gebildeten Winkel fMF durch die gerade Linie Tq; so ist diese die gesuchte Tangente für M; was auf ähnliche Art, wie bey der Ellipse, bewiesen wird.

Zusätze. 1. Wenn man die Radien vektoren verlängert, so sind die Winkel QMq, qMR sowohl unter sich, als den Winkel FMT, TMf gleich. Stellt daher erstens MSm den Schnitt eines hyperbolischen Hohlspiegels vor; so wird, weil FMT = QMq, der von F auf M fallende Stral so nach Q reflektirt, als wenn er von f ausgienge; und umgekehrt: die in der Richtung QMf den Spiegel in M treffenden Stralen werden im Brennpunkte F gesammelt.

Da zweytens der Radius vektor fM mit der Tangente TM denselben Winkel bildet, welchen mit eben dieser die Verlängerung von FM macht; so wird, wenn nun MSm den Schnitt eines hyperbolischen konvexen Spiegels vorstellt, jeder von f ausgehende Stral, welcher auf M fällt, so nach R reflektirt, als wenn er von F ausgegangen wäre; und umgekehrt: ein nach der Richtung RM in M auffallender Stral wird in den Brennpunkt f reflektirt.

2. Die Tangente für S oder s ist senkrecht auf die [illegible]ptaxe, daher sind auch die Ordinaten dieser Axe senkrecht auf die Verlängerungen von Ss.

§. 43. Aufgabe. Den algebraischen Werth für die Subnormale NP zu finden.

Auflösung. Mit dem Halbmesser FM ziehe man aus M, als Mittelpunkte einen Bogen, welcher fM in D schneidet, und ziehe FD; so ist FM = MD, △ FDM gleichschenklig, also die Winkel an F und D, wie an o gleich, letztere folglich rechte Winkel. Daher FMo + oFM = 90° = FMN + FMT, folglich oFM = FMN, folglich FD ‖ der Normale NM, daher

fD: fF = MD (= MF): NF, oder (da fD = fM — MD = fM — FM = a)

$$a : 2e = \frac{2eu}{a} - \frac{a}{2} : NF, \text{ und } NF = \frac{4e^2u - a^2e}{a^2}.$$

Ferner FP = PC — CF = u — e, daher NP = NF — FP = $\frac{4e^2u - a^2u}{a^2}$, und durch Subst. für e^2 = $\frac{a^2 + c^2}{4}$ und Reduktion ist

$$NP = \frac{c^2u}{a^2} = \frac{pu}{a} \text{ (§. 37. Zus. 1.), oder da CP}$$

= SP + CS = x + ½ a; so ist auch

$$NP = \frac{c^2}{a^2}(x + \tfrac{1}{2}a) = \frac{px}{a} + \frac{p}{2}.$$

Zusätze. 1. Also NP: u = p: a, d. i. das Verhältniß der Subnormale zur Abscisse, vom Mittelpunkte angerechnet, ist konstant.

2. Wird

2. Wird $u = \frac{1}{2}a$; so wird $NP = \frac{c^2}{2a} = \frac{p}{2}$, aber in jedem andern Falle, wo $u < \frac{1}{2}a$, ist die Subnormale der Hyperbel $>$, die Subnormale der Parabel $= (\S. 12.)$, und der Ellipse $< \frac{p}{2}$ $(\S. 27.)$.

§. 44. Aufgabe. Einen algebraischen Werth für die Subtangente PT zu finden.

Auflösung. NP: PM: PT, also $PT = \frac{PM^2}{NP} = \frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}$ $(\S\S. 38. 42.) = \frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x}$ $(\S. 37.$ Zus. 2. und §. 42.).

Zusätze. 1. Also ist der Abstand des Scheitels S vom Zusammenstoßungspunkte der Tangente mit der Axe, oder $ST = PT - PS = \frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x} - x = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$.

Dieser Ausdruck belehrt uns über eine wichtige Eigenschaft der Krümmung dieser Curve. Ungeachtet nämlich ihre Aeste ins Unendliche auslaufen, so ist doch ihre Krümmung so, daß alle Tangenten, die man für irgend einen ihrer Punkte ziehen mag, der Axe nur zwischen S und C begegnen. Denn setzt man in jenem Ausdrucke jeden erdenklichen Werth für x, von o an, bis zum ∞; so wächst ST nur von o bis zur Grenze $\frac{1}{2}a$, indem x $= \infty$ gesetzt, $ST = \frac{\frac{1}{2}ax}{x} = \frac{1}{2}a$ wird. Folglich geht die für einen unendlich entfernten Punkt eines oder des

andern

andern Astes der Hyperbel gezogene Tangente durch den Mittelpunkt.

Da ferner die Aeste der opponirten Hyperbel den Aesten SM, Sm vollkommen gleich, und S und s von C gleichweit entfernt sind; so folgt, daß dieselben Tangenten für die unendlich entfernten Endpunkte der Aeste SM, Sm auch die Tangenten für die unendlich entfernten Punkte der opponirten Hyperbel sind.

Diese Tangenten (Cx, Cy Fig. 12.) nennt man die Asymptoten (asymptotos) der Hyperbel — ἀσύμτωτοι, rectae non concidentes. Diese sind demnach nichts anders, als gerade Linien, die, vom C ausgehend, sich der Hyperbel ohne Ende nähern, ohne sie je anders, als in einem unendlichen Abstande, treffen zu können.

Zieht man durch S mit PM || SE; so ist △ TSE ∽ △ TPM, daher TP : PM = TS : SE, d. i. $\frac{ax+x^2}{\frac{1}{2}a+x} : y = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x} : SE$, also $SE = \frac{\frac{1}{2}ay}{a+x} = \frac{\frac{1}{2}c\sqrt{(ax+x^2)}}{a+x}$ (§. 37. Zus. 2.). Dieser Werth wird, wenn $x = \infty$, $= \frac{1}{2}c = CL$.

Fig. 12.

Daraus resultirt die Methode, Asymptoten zu ziehen. Das durch S gezogene Loth verlängert man auf beyden Seiten, bis SB = Sβ = CL wird. Die dann

durch

durch B und C gezogenen Linien BCx, βCy sind die Asymptoten für die Hyperbel.

Fig. 10.

2. Wenn man weiter in den Gleichungen für die Subtangente setzt $x = -\frac{1}{2}a$, oder $u = o$; so wird $PT = \frac{-\frac{1}{4}a^2}{o} = -\infty$, d. i. in diesem Falle giebt es keine Tangente und Subtangente. Setzt man aber $u = \frac{1}{2}a$, oder $x = o$, so wird $PT = \frac{o}{\frac{1}{2}a} = o$, d. i. die Subtangente verschwindet im Scheitel S der Hyperbel.

Fig. 6.

Hieraus sieht man ein, daß die Subtangente für die Hyperbel, wie für die Kreislinie und die Ellipse, zugleich von der Hauptaxe und der Abscisse, für die Parabel aber einzig von der letztern abhänge. Es folgt demnach, daß, wenn 2 Ellipsen, oder eine Ellipse und ein Kreis über derselben Axe beschrieben sind, und man irgend eine gemeinschaftliche Ordinate FIi zieht; die Tangenten für I und i in demselben Punkte T der Axe zusammenkommen, indem beyde Curven einerley Subtangente, wie einerley Abscisse und Axe haben.

Dasselbe gilt in Ansehung zweyer über derselben Axe beschriebenen Hyperbeln, und zweyer Parabeln, die denselben Scheitel haben.

Fig.

Fig. 10.

3. PT. $u = (u - \frac{1}{2}a)(u + \frac{1}{2}a)$, oder $u : u - \frac{1}{2}a = u + \frac{1}{2}a : PT$, d. i. $CP : PS = Ps : PT$, oder (invert. et altern.) $PS : PT = CP : Ps$, d. i. die Abstände der Punkte P, S, T, C, s sind in einer geometrischen Proportion.

4. $CT = PC - PT = u - \frac{u^2 + \frac{1}{4}a^2}{u} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{u}$,

also $u : \frac{1}{2}a : CT$, oder $CP : CS : CT$.

Oder MV als Ordinate der kleinen Axe für den Punkt M angenommen, wird CV die entsprechende Abscisse, und, wenn man die Tangente verlängert, Vt die Subtangente; man findet dann, wie vorhin

$CV : CL : Ct$,

d. i. die große oder kleine Axe ist die mittlere Proportionallinie zwischen der vom Mittelpunkte angerechneten Abscisse und dem Abstande des Zusammenstoßungspunktes (T oder t).

5. ST ist auch $= CS - CT = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{4}a^2}{u} =$

$(u - \frac{1}{2}a) \cdot \frac{\frac{1}{2}a}{u}$; und $sT = Cs + CT = (u + \frac{1}{2}a) \cdot \frac{\frac{1}{2}a}{u}$. Daher $u : u - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : ST$ d. i.

$PC : PS = CS : ST$, und eben so:

$PC : Ps = Cs : sT$;

Gleichungen und Proportionen für die Abstände des Punktes

tes T von S und s. Componirt man beyde Proportionen; so hat man $PC^2 : PS. Ps = CS. Cs : ST. sT$, oder $u^2 : \frac{1}{4}a^2 = u^2 - \frac{1}{4}a^2 : ST. sT$ (§. 38.); also das Rechteck aus beyden Abständen $= (u^2 - \frac{1}{4}a^2) \frac{\frac{1}{4}a^2}{u^2}$.

§. 45. Aufgabe. Den algebraischen Werth I. für die Normale NM, II. für die Tangente MT zu finden.

Auflösung. I. $NM^2 = PM^2 + PN^2$

$= \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^4 u^2}{a^4}$ (§§. 38. 43.),

$= \frac{c^2}{4a^4} (4a^2u^2 - a^4 + 4c^2u^2)$, oder auch

$NM^2 = \frac{c^2}{a^2} (ax + x^2) + \left(\frac{\frac{1}{2}ac^2 + c^2x}{a^2}\right)$ (§§. 38. 43.).

II. $MT^2 = PM^2 + PT^2 = \frac{c^2}{a^2} (u^2 - \frac{1}{4}a^2) +$

$\left(\frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}\right)^2 = \left(\frac{c^2u^2}{a^2} + u^2 - \frac{1}{4}a^2\right) \frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u^2}$;

oder $MT^2 = \frac{c^2}{a^2} (ax + x^2) + \left(\frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x}\right)^2$.

Drit-

Dritter Abschnitt.

Von der Hyperbel, auf die Durchmesser bezogen.

Fig. 12.

§. 46. Erklärungen.

1. Die gerade, durch den Mittelpunkt C der Hyperbel gezogene, und in den Punkten O und M der opponirten Hyperbeln begrenzte, Linie heißt Durchmesser der Hyperbel.

2. Die gerade, von irgend einem Punkte D der Hyperbel mit der Tangente MT für den Punkt M parallel gezogene, und in dem verlängerten Durchmesser begrenzte, Linie DE heißt Ordinate für den Durchmesser MO; EM, EO sind die entsprechenden Abscissen.

3. Wenn man 2 andere opponirte Hyperbeln so zieht, daß LI ihre große Axe, und Ss Nebenaxe wird; so heißen diese Hyperbeln den erstern zugeordnete (hyperbolae conjugatae), und umgekehrt. Daher, wenn man mit der Ordinate DE des Durchmessers MO parallel aus irgend einem Punkte G der Hyperbel GLW eine gerade Linie durch C bis zur entgegengesetzten Hyperbel zieht, heißt auch diese Linie GH der beygeordnete Durchmesser (diameter conjugata s. imaginaria), MO der Hauptdurchmesser, und umgekehrt. Spricht man von beyden zugleich; so nennt man sie kurz beygeordnete Durchmesser.

Ohne auf die Ordinate DE Rücksicht zu nehmen, erhält man den beygeordneten Durchmesser GH auf folgende Art:

Man suche zwischen sP, SP die mittlere Proportionallinie CR, so, daß nämlich $CR^2 = sP.SP = (u + \frac{1}{2}a)(u - \frac{1}{2}a)$ ist; errichte in R das Loth RH, in H begrenzt von der durch C, mit TM parallel, gezogenen geraden Linie CH; macht man nun CG = CH; so hat man die verlangte GH.

4. Die dritte Proportionallinie zu MO und GH nennt man den Parameter des Hauptdurchmessers MO.

§. 47. Aufgabe. Eine Gleichung für die Hyperbel zwischen den Coordinaten irgend eines Durchmessers MO zu finden.

Auflösung. Man ziehe mp, EQ ‖ PM, und mN ‖ Ss. PM sey = y, CP = u, Qp = g, CQ = k; daher $SP = CP - CS = u - \frac{1}{2}a$; $sP = u + \frac{1}{2}a$; $Sp = Cp - CS = CQ - Qp - CS = k - g - \frac{1}{2}a$; $sp = k - g + \frac{1}{2}a$.

Nun ist 1), weil △ CPM ∽ △ CQE,

$CP : PM = CQ : QE$, d. i. $u : y = k : QE = \frac{ky}{u}$;

und, weil △ TPM ∽ mNE,

$PT : PM = mN(=QP) : NE$, d. i. $\frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u} : y = g : NE = \frac{guy}{u^2 - \frac{1}{4}a^2}$ also $mp = NQ = QE - NE = \frac{ky}{u} - \frac{guy}{u^2 - \frac{1}{4}a^2}$.

2).

2). $pm^2 : PM^2 = Sp. ps : SP. Ps$ (§. 38. Zuf. 1.),

oder $\left(\frac{ky}{u} - \frac{guy}{u^2 - \frac{1}{4}a^2}\right)^2 : y^2 = (k - g - \frac{1}{2}a)$

$(k-g+\frac{1}{2}a) : (u-\frac{1}{2}a)(u+\frac{1}{2}a)$, oder $\frac{k^2y^2}{u^2} - \frac{2gkuy^2}{u(u^2-\frac{1}{4}a^2)}$

$+ \frac{g^2u^2y^2}{(u^2-\frac{1}{4}a^2)^2} : y^2 = k^2 - 2kg + g^2 - \frac{1}{4}a^2 : u^2 - \frac{1}{4}a^2.$

Hieraus entwickelt man die Gleichung:

$$-\frac{\frac{1}{4}a^2k^2}{u^2} + \frac{g^2u^2}{u^2 - \frac{1}{4}a^2} = g^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

3). Man setze ferner $CM = \frac{1}{2}a'$; $CG = CH = \frac{1}{2}c'$; $CE = u'$ und $mE = y'$. In den ähnlichen $\triangle\triangle$ CPM, CQE ist $CM : CP = CE : CQ$, daher $CQ = k = \frac{uu'}{\frac{1}{2}a'}$. Auch sind die $\triangle\triangle$ mNE, CHR wegen der parallelen Seiten ähnlich, folglich $CH : CR = mE : mN$, woraus $mN = pQ = g = \frac{CR.\,y'}{\frac{1}{2}c'}$, folglich

$$g^2 = \frac{CR^2.\,y'^2}{\frac{1}{4}c'^2} = \frac{y'^2\,(u^2 - \frac{1}{4}a^2)}{\frac{1}{4}c'^2}$$ (§. 46. 3)).

4). Substituirt man diese Werthe in der unter 2) zuletzt gefundenen Gleichung; so hat man:

$$-\frac{1}{4}a^2.\,\frac{u^2u'^2}{\frac{1}{4}a'^2u^2} + \frac{y'^2u^2(u^2 - \frac{1}{4}a^2)}{\frac{1}{4}c'^2(u^2 - \frac{1}{4}a^2)} = \frac{y'^2u^2}{\frac{1}{4}c'^2} -$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2y'^2}{\frac{1}{4}c'^2} - \frac{1}{4}a^2;$$ woraus durch Reduktion und Division

mit $\frac{1}{4}a^2$, die Gleichung: $-\frac{u'^2}{\frac{1}{4}a'^2} = -\frac{y'^2}{\frac{1}{4}c'^2} - 1$, oder

$y'^2 = \frac{c'^2}{a'^2}(u'^2 - \frac{1}{4}a'^2)$ erhalten wird.

Zusätze. 1. Da diese Gleichung dieselbe ist, wie wir sie für die Hyperbel, bezogen auf die große Axe, im §. 38. gefunden haben; so folgt, daß auch $y'^2 = \frac{c'^2}{a'^2}(a'x' + x'^2)$, und $y'^2 = \frac{p'}{a'}(a'x' + x'^2)$ sey, wo nämlich p' den Parameter des Hauptdurchmessers bezeichnet.

2. Setzt man $y' = 0$; so ist $u'^2 - \frac{1}{4}a'^2 = 0$, und $u' = \pm\frac{1}{2}a$, d. i. die Curve begegnet dem Durchmesser MO in 2 entgegengesetzten Punkten M und O, deren jeder von C um $\frac{1}{2}a'$ oder CM absteht, folglich wird jeder Durchmesser in C halbirt.

3. Die 2 gleichen Werthe von $y' = \pm\frac{c'}{a'}\sqrt{(u'^2 - \frac{1}{4}a'^2)}$ zeigen an, daß, wenn man ED = Em macht, der Punkt D zur Curve gehöre, und daher jeder Durchmesser seine Ordinaten halbire.

4. Die Gleichung giebt: $y'^2 : u'^2 - \frac{1}{4}a'^2 = c'^2 : a'^2$, oder $mE^2 : ME.EO = GH^2 : MO^2$; d. i. das Quadrat irgend einer Ordinate eines Hauptdurchmessers verhält sich zum Rechtecke aus den entsprechenden Abscissen, wie das Quadrat des zugeordneten Durchmessers zum Quadrat des Hauptdurchmessers, oder wie

die

die Quadrate der Hälften dieser Durchmesser.

Und, weil letzteres Verhältniß konstant ist, so verhalten sich die Quadrate der Ordinaten für die Durchmesser, wie die Rechtecke aus den Abscissen.

§. 48. Lehrsatz. Das Rechteck Bb aus den Axen ist gleich dem Parallelogramm unter je 2 Durchmessern.

Beweis. Man fälle aus C das Loth Cv auf die fortgezogene Tangente; so ist wegen der ähnlichen Dreyecke CvT, TPM

$$TM : PM = CT : Cv, \text{ also } Cv = \frac{PM \cdot CT}{TM};$$

und in den ähnlichen Dreyecken CRH, TPM

$$PT : TM = CR : CH (= CG), \text{ also } CG = \frac{TM \cdot CR}{PT};$$

$$\text{folglich } Cv^2 \cdot CG^2 = \frac{PM^2 \cdot CT^2 \cdot CR^2}{PT^2}.$$

$$\text{Aber } PM^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - \tfrac{1}{4}a^2); \quad CR^2 = u^2 - \tfrac{1}{4}a^2;$$

$$CT^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{u^2} \text{ (§. 44. Zus. 4.), und } PT^2 = \frac{(u^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}{u^2}.$$

Diese Werthe oben substituirt, erhält man $Cv^2 \cdot CG^2 = \frac{1}{16}a^2c^2$, daher $Cv \cdot CG = \frac{1}{4}ac$. Nun ist aber die bis zur Asymptote verlängerte Tangente $tM = CG$ (wie unten im §. 54. erhellen wird), folglich CtMG ein Parallelogramm, dessen Flächenraum $= Cv \cdot tM = Cv \cdot CG = \frac{1}{4}ac$, daher auch $2\,CMG = \frac{1}{4}ac$ ist.

Denkt man nun über MG noch ein entgegengesetztes Dreyeck, dessen Seiten parallel und gleich sind den Seiten CM, CN, errichtet; so bilden beyde gleiche Dreyecke ein Parallelogramm, welches gleich ist 2 CMG. Dasselbe ist aber auch ein unter den halben beygeordneten Durchmessern CM, CG konstruirtes Parallelogramm, also ist dieses $= \frac{1}{2}a . \frac{1}{2}c$. Da sich aber die Hälften, wie ihre Ganzen verhalten; so ist das Rechteck aus den Axen gleich dem Parallelogramm unter irgend 2 beygeordneten Durchmessern.

Zusatz. Also sind die Parallelogramme unter allen zugeordneten Durchmessern einander gleich, und konstante Größen.

§. 49. Lehrsatz. Der Unterschied der Quadrate jeder 2 beygeordneten Halbmesser gleicht dem Unterschiede der Quadrate der halben Axen.

Beweis. $\triangle$ TPM $\sim$ $\triangle$ CRH, daher TP: $PM = CR : RH$, folglich $RH^2 = \frac{PM^2 . CR^2}{PT^2} = \frac{c^2 u^2}{a^2}$.

Ferner ist $CM^2 = CP^2 + PM^2$, und $CH^2 = CG^2 = CR^2 + RH^2$, also $CM^2 - CG^2 = CP^2 + PM^2 - CR^2 - RH^2$. Durch Substitution der algebraischen Werthe für diese Größen findet man

$$CM^2 - CG^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2.$$

Zusätze. 1. Also ist auch jene Differenz der Quadrate irgend 2 zugeordneter Durchmesser beständig.

2. Bey

2. Bey der gleichseitigen Hyperbel, wo $a = c$, folglich $CM^2 - CG^2 = 0$ (und $CM = CG$), ist jeder Hauptdurchmesser seinem zugeordneten Durchmesser gleich.

3. Wenn man in $CG^2 = CR^2 + RH^2$ die algebraischen Werthe setzt; so ist $CG^2 = u^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{c^2 u^2}{a^2}$;

aber $TM^2 = CG^2$. $\frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u^2}$ (§. 45. II.)

Nun ist wegen $\triangle$ MPT $\sim$ $\triangle$ Mih

$PT^2 : TM^2 = iM^2 : hM^2$, oder

$\frac{(u^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}{u^2} : CG^2 . \frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u^2} = u^2 : hM^2$, daher

$$hM^2 = \frac{CG^2 . u^2}{u^2 - \frac{1}{4}a^2}, \text{ und } TM^2 . hM^2 = CG^4,$$

oder $TM . hM = CG^2$.

Ist nun p' der Parameter für MO; so hat man $2\,CM : 2\,CG = 2\,CG : p'$ (§. 46. 4)), daher $2p'$. $CM = 4\,CG^2$, oder $CG^2 = \frac{1}{2}p'$. $CM = TM$. hM, folglich

$CM : TM = hM : \frac{1}{2}p'$.

Dieses enthält den Grund der Auflösung folgender Aufgabe.

§. 50. Aufgabe. Es seyen zwey beygeordnete Durchmesser und der von ihnen gebildete Winkel gegeben, man soll die Axen der Hyperbel finden.

Fig.

Fig. 13.

Auflösung. Man schneide von OM einen Theil MR ab, welcher gleich ist $\frac{1}{2}$ p′, und in der Mitte von RC errichte man das Loth IK, welches in irgend einem Punkte K die verlängerte Tangente MT, welche ‖ HG, schneidet. Von K aus, als dem Mittelpunkte, ziehe man mit dem Halbmesser = dem Abstande jenes Punktes von C, einen Kreis, welcher Mh in 2 Punkten T und h schneiden wird. Zieht man nun durch diese und C die Linien TC und Ci; so hat man die Richtungen der Axen. Denn es ist klar, daß TCi ein rechter Winkel ist, indem die Kreislinie durch C geht, und Th den Durchmesser bildet. Aber CM: TM = hM: MR (S. §. 126. II.), also, da MR = $\frac{1}{2}$ p′, CM: TM = hM: $\frac{1}{2}$ p′.

Um zweytens die Größe der Axen zu bestimmen, fälle man die Lothe Mi und MP, nehme dann CS als mittlere Proportionallinie zwischen CP und CT, ferner Cl als mittlere Proportionale zwischen Ci und Ch (§. 44. Zus. 4.).

Vier-

Vierter Abschnitt.

Von der Hyperbel, auf die Asymptoten bezogen.

---

§. 51. Erklärungen.

1. Was Asymptoten sind, und die Art, wie sie gezogen werden, haben wir im §. 44. Zus. 1. erklärt.

2. Die für beyde Aeste der Hyperbel gezogenen Asymptoten Cx, Cy, welche mit der Axe Cs denselben Winkel bilden, heißen zugeordnete Asymptoten.

3. Der Winkel xCy, unter welchem sich die Asymptoten am Mittelpunkte schneiden, heißt Asymptoten-Winkel (angulus asymptotorum).

Da die opponirten Hyperbeln eigentlich nur eine Figur ausmachen, und die zugeordneten Hyperbeln sich von jenen nur durch Umtauschung der Axen unterscheiden, folglich mit jenen eine einzige Figur bilden; so folgt, daß die Asymptoten Cx, Cy sowohl zu den opponirten, als zugeordneten Hyperbeln gehören.

Aus der Methode, die Asymptoten zu ziehen, ist klar, daß der Asymptotenwinkel βCB von dem wechselseitigen Verhältniße der Axen abhängt, indem diese die Katheten der bey S rechtwinkligen Dreyecke CBS, CβS sind. Sind nun die Axen, oder ihre Hälften gleich; so werden diese Dreyecke, wie das ganze βCB, gleichschenklich, alle spitze Winkel wechselseitig gleich, daher der

Asymp-

Asymptotenwinkel ein rechter, und man hat gleichseitige Hyperbeln. Der Asymptotenwinkel wird aber spitz oder stumpf, je nachdem die große Axe entweder größer oder kleiner ist, als die zugeordnete Axe Ll. In beyden Fällen sind die Hyperbeln ungleichseitig. Nimmt man CF = CB für den Sin. tot.; so wird die halbe zugeordnete Axe SB = CL der Sinus, die halbe große Axe SC der Cosinus, der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel FS der Quersinus des halben Asymptotenwinkels = A. Nimmt man aber CS für den Sin. tot., so wird die halbe kleine Axe die Tangente von A. Dann ist, für Sin. tot. = 1, CL : CL (SB) = 1 : tang. A, daher $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}a$. tang. A; oder $\frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}a^2$. tang. A^2; also tang. $A^2 = \frac{c^2}{a^2}$, also auch $y^2 =$ tang. A $(u^2 - \frac{1}{4}a^2)$ (§. 38.).

Fig. 14.

§. 52. Aufgabe. Eine Gleichung für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten CBO, Cβo zu finden.

Auflösung. Man ziehe durch irgend einen Punkt V der Hyperbel OVo || Ll, und VH || CBO; durch den Scheitel S SG || Cβo, und mache die Bezeichnungen: CS = $\frac{1}{2}$a; CL oder Sβ, oder SB = $\frac{1}{2}$c; CP = u, PV = y; SG = m; GB = n; CQ = t, und QV = v.

Nun

Nun ist 1) wegen $\triangle$ CPO $\backsim$ $\triangle$ CSB

CS : SB = CP : PO, d. i. $\frac{1}{2}$ a : $\frac{1}{2}$ c = u : PO, also

$PO = Po = \frac{cu}{a}$; daher $VO = \frac{cu}{a} - y$, und $Vo = \frac{cu}{a} + y$, folglich $VO.\ Vo = \frac{c^2 u^2}{a^2} - y^2 = \frac{1}{4} c^2$ (§. 38.) = $SB^2 = CL^2$, d. i. das Rechteck aus den Segmenten jener Linie gleicht dem Quadrate der halben kleinen Axe. Eine Eigenschaft, die für jeden Punkt der Hyperbel gilt, folglich sind jene Rechtecke auch unter sich gleich, und konstante Größen.

2) Da die Dreyecke QVO, VHo und SGB einander ähnlich sind; so ist

SB : SG = VO : VQ, und

SB : GB = Vo : VH, also

$SB^2 : SG.\ GB = VO.\ Vo : VQ.\ VH$, d. i. $\frac{1}{4} c^2 : mn = \frac{1}{4} c^2 : vt$, woraus man die gesuchte Gleichung vt = mn erhält.

Zusätze. 1. Bey jedem Punkte V also der Hyperbel hat man immer VQ. VH, oder vielmehr VQ. CQ = SG. GB. Setzt man nun, der Punkt V falle in S; so wird CQ wieder CG, und QV wird SG, man hat folglich CG. SG = SG. GB; da also hieraus CG = GB, folglich der Punkt G Mittelpunkt der Linie CB ist; so wird CG = SG = GB seyn müssen. Denn würde man eine Kreislinie über CB (deren Halbmesser folglich CG wäre,) beschreiben; so würde sie, weil CSB ein

rech-

rechter Winkel ist, durch S gehen müssen. Es ist also $SG = GB$, oder $m = n$, also für diesen Fall wird $vt = m^2 = CG^2$.

Diese Gleichung $vt = CG^2$ drückt man so aus: die Potenz CG^2 oder SG^2 der Hyperbel gleicht dem Rechtecke aus der asymptotischen Abscisse in die entsprechende Ordinate.

2. Da $SG^2 = CS^2 = \frac{1}{4} BC^2$; aber $BC^2 = BS^2 (CL^2) + CS^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}$; so ist auch $\frac{1}{4} BC^2$ oder $SG^2 = \frac{a^2 + c^2}{16} = VQ. CQ.$ Also sind alle diese Rechtecke einander gleich und konstante Größen.

3. Bezeichnet man VQ, CQ, weil sie die Stelle der Ordinaten und Abscissen vertreten, wieder durch y und x, und CG durch d; so kann man auch die Gleichung für die Hyperbel, auf die Asymptoten bezogen, so angeben: $xy = d^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$; daher $y = \frac{d^2}{x}$; $x = \frac{d^2}{y}$; $y^2 = \frac{d^4}{x^2}$; $d = \sqrt{xy}$ etc.

4. Für irgend eine andere Ordinate AX und Abscisse CX, ist eben so $AX. CX = CG^2 = VQ. CQ$, daher $AX : VQ = CQ : CX$, d. i. die Abscissen der Asymptoten sind ihren entsprechenden Ordinaten umgekehrt proportional.

Fig.

Fig. 12.

5. So ist an. nA = CL². Zieht man mit Ss ‖ nx; so ist auch das Rechteck der Segmente nr, nx, welche die Asymptote macht, gleich dem Quadrate der halben großen Axe, folglich diese Rechtecke einander gleich, und konstante Grösßen.

Denn wegen △ arn ∽ △ CSβ ist
an : nr = : βS(Cl) : SC, und wegen △ xAn ∽ βSC,
nA : nx = βS : SC, daher
an. nA : nr. nx = Cl² : SC², also nr. nx = SC².

Fig. 14.

§. 53. Lehrsatz. Zieht man durch irgend einen Punkt V der Hyperbel auf irgend eine Weise die durch die Asymptoten begrenzte Linie RVr; so sind die zwischen der Curve und jeder Asymptote liegenden Theile RV, mr jener Linie einander gleich.

Beweis. Wenn man durch m Dd ‖ Oo zieht; so ist in den ähnlichen Dreyecken rdm, roV
Vr : mr = Vo : md, und, weil △ RVO ∽ RmD,
VR : Rm = VO : Dm, daher
VR. vr : Rm. mr = VO. Vo : Dm. md. Aber die Rechtecke VO. Vo, Dm. md sind gleich (§. 52.), also auch VR. Vr = Rm. mr, oder VR (Vm + mr) = (VR + Vm). mr, woraus man, durch Multiplikation und Weglassung derselben Grösßen VR. mr, erhält VR. Vm = Vm. mr, folglich VR = mr.

Zu-

Zusatz. Also wird jede von den Asymptoten begrenzte Tangente Tt im Berührungspunkte M halbirt.

§. 54. Lehrsatz. Das Rechteck der Segmente RV, Vr der geraden, mit der Tangente TM für irgend einen Punkt M der Hyperbel parallelen, Linie Rr ist I. gleich dem Quadrate der Tangente TM, und II. gleich dem Quadrate des halben zugeordneten Durchmessers CN, welcher mit Rr parallel gezogen ist.

Beweis. I. Man verlängere die Tangente bis zur Asymptote, und ziehe durch M IMi || Ll. Weil nun die Dreyecke TMI und RVO, eben so Mit und Vor ähnlich sind; so ist

$$TM : IM = RV : VO, \text{ und}$$

$$Mt (= TM) : Mi = Vr : Vo, \text{ daher}$$

$$TM^2 : IM.Mi = RV.Vr : VO.Vo, \text{ aber}$$

$IM.Mi = VO.Vo$, also auch $RV.Vr = TM^2$.

II. Man ziehe durch C den Durchmesser CMW. Dieser, indem er die Tangente tMT halbirt (§. 53. Zus.), halbirt auch die mit tT parallele Linie Rr. Setzt man nun $CM = \frac{1}{2}a'$; $TM = \frac{1}{2}q$; $CW = u'$ und die Ordinate $WV = y'$; so erhält man aus den ähnlichen Dreyecken CMT, CWR, wo $CM : MT = CW :$ WR ist, $WR = \frac{qu'}{a'}$, folglich $RV = \frac{qu'}{a'} - y'$ und $Vr = \frac{qu'}{a'} + y$; daher $RV.Vr = TM^2 = \frac{1}{4}q^2 = q'^2$

$= \frac{q^2 u'^2}{a'^2} - y'^2$. Setzt man in dieser Gleichung den im §. 47. gefundenen Werth für y'^2; so hat man

$$\frac{q^2 u'^2}{a'^2} - \frac{c'^2 u'^2}{a'^2} + \tfrac{1}{4} c'^2 = \tfrac{1}{4} q^2,$$

oder $(q^2 - c'^2)\left(\frac{u'^2}{a'^2} - \frac{1}{4}\right) = 0$, woraus man durch Division mit $\frac{u'^2}{a'^2} - \frac{1}{4}$ erhält

$q^2 - c'^2 = 0$, also $q = c'$, oder $\frac{1}{2} q = \frac{1}{2} c'$, d. i. $tM = TM = CN$ (nach Fig. 12. $Mt = CG$, was zu beweisen, wir im §. 48. versprochen hatten), oder $TM^2 = CN^2 = RV. Vr.$

Zusätze. 1. Da man für V jeden andern Punkt v der Hyperbel hätte wählen können, folglich auch $Iv. ve = CN^2 = RV. Vr = TM^2 = Mt^2$; so gilt der Satz allgemein, daß nämlich das Rechteck der Segmente, welche einer der Aeste der Hyperbel und die Asymptote macht, gleich sey dem Quadrate des demjenigen Durchmesser, dessen gerade Linie Ordinate ist, beygeordneten halben Durchmessers.

2. Weil ferner jede von den Asymptoten begrenzte Tangente im Berührungspunkte halbirt, und gleich ist dem ihr parallelen Durchmesser; so ist auch die Differenz der Quadrate der Tangenten, welche den beygeordneten Durchmessern zwischen den Asymptoten parallel

lel gezogen werden, eben so eine beständige Größe, wie der Unterschied der Quadrate dieser Durchmesser selbst (§. 49. Zus.).

Fig. 15.

3. Aus dem Satze und dem Zus. §. 53. folgt auch die Methode, die Hyperbel geometrisch zu beschreiben, sobald man die halben beygeordneten Durchmesser CM, CN und den Conjugationswinkel weiß.

Denn wenn man durch den Anfangspunkt M des Durchmessers CM eine Tangente zieht, und MT, Mt gleich CN macht; dann durch C die Linien CT, Ct zieht; so hat man die Asymptoten. Zieht man nun durch M mehrere an den Asymptoten begrenzte Linien PMQ. PMQ . . . und macht immer PO = QM; so gehören alle Punkte O zur Hyperbel. Eines jeden solchen Punktes O kann man sich bedienen, um die Punkte V zu finden, indem man durch O Linien, wie RS zieht, und dann SV = RO macht (§. 53.).

Würde man aber den Asymptotenwinkel, wie dessen Supplement halbiren; so hätte man die Richtungen der Axen, deren Größe man dann nach §. 50 finden, und so das dortige Problem lösen könnte.

Allge=

Allgemeiner Abschnitt.

Von dem Krümmungskreise der Curven.

Fig. 16.

§. 55. **Erklärung.** Wenn eine Kreislinie Mm und eine andere Curve AMB in demselben Punkte M eine gemeinschaftliche Tangente TM haben, und die erste Ablenkung der Kreislinie von der Richtung der Tangente eben so groß ist, als die erste Ablenkung der Curve von derselben Tangente; so hat die Kreislinie Mm in dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte M einerley Krümmung mit der Curve. Diese Kreislinie heißt daher **Krümmungskreis** (circulus osculator) für die Stelle M, sein Halbmesser MC **Krümmungshalbmesser** (radius osculi, s. curvaturae, radius evolutae), und sein Mittelpunkt C der **Krümmungsmittelpunkt**. Unter unzählig vielen Kreisbogen, die M und MT gemeinschaftlich haben können, ist doch nur einer der Krümmungskreis, der nämlich, dessen erste Ablenkung von der Tangente an mit der ersten der Curve gleiche Größe hat. Stellt man sich diese ersten Ablenkungen als unendlich kleine Bogen vor; so kann man jenes auch so ausdrücken: der Krümmungskreis geht zum unendlich kleinen Bogen einer Curve im Punkte M so nahe hinzu, daß, so wie zwischen TM und Mm keine andere gerade Linie möglich ist, auch zwischen dem unendlich kleinen Bogen der Curve und dem entsprechen-

den

den Bogen des Krümmungskreises kein anderer Kreisbogen gezogen werden kann.

Fig. 17.

§. 56. Aufgabe. Für einen gegebenen Punkt M eines Kegelschnittes den Krümmungshalbmesser zu finden.

Auflösung. Es sey TM die Tangente für den Punkt M, AMB ein unendlich kleiner Bogen der Curve; MQ der Durchmesser; AOB die mit TM parallele Sehne des Bogen AMB, folglich AO, BO Ordinaten, sowohl zu MQ als zum Durchmesser des Krümmungskreises, auf welchen sie senkrecht sind, gehörig. Weil ferner jeder Halbmesser des Kreises auf den Berührungspunkt M senkrecht ist; so wird der Krümmungshalbmesser z. B. Mb in der Normale MN des Kegelschnittes, oder in ihrer Verlängerung liegen. Man setze endlich, daß die Peripherie des Krümmungskreises dem Durchmesser MQ, oder dessen Verlängerung in irgend einem Punkte a begegne, von welchem man denn eine gerade Linie zu b ziehe.

Nun ist 1) aus der Natur des Kegelschnittes $AO^2 : MO. OQ = CE^2 : CM^2$ (vergl. §. 33. §. 47. Zus. 4.). Aber aus der Natur des Kreises ist AO^2, oder $AO. OB (= ax - x^2) = MO. Oa$; folglich $MO. Oa : MO. OQ = CE^2 : CM^2$ oder

$$Oa : OQ = CE^2 : CM^2.$$

Weil die Punkte A, O, B, M unendlich nahe liegen;

so

so ist MQ unendlich wenig von OQ, und aO eben so von aM verschieden; daher

$$Ma = \frac{MQ.\,CE^2}{CM^2} = \frac{2\,CM.\,CE^2}{CM^2} = \frac{2CE^2}{CM}.$$

2). Nach der Voraussetzung ist a ein auf dem Durchmesser des Krümmungskreises stehender Peripheriewinkel, daher $= 90°$, also $\triangle MRC \sim \triangle Mab$, und $MR : MC = Ma : Mb$, oder $Mb = \frac{MC.\,Ma}{MR} = \frac{2CE^2}{MR}$, und I. $\frac{1}{2}Mb = \frac{CE^2}{MR}$, d. i. der Krümmungshalbmesser gleicht dem Quadrate des halben beygeordneten Durchmessers, dividirt durch das von diesem Durchmesser zum Berührungspunkte der Tangente gezogene Loth.

II. So wie nach Fig. 8. MD. $AC = \frac{1}{2}a.\,\frac{1}{2}c$ (§. 34): so ist auch hier $MR.\,CE = CS.\,CL$, oder $MR = \frac{CS.\,CL}{CE}$, daher $\frac{1}{2}Mb = \frac{CE^3}{CS.\,CL}$, d. i. der Krümmungshalbmesser gleicht dem Würfel des halben zugeordneten Durchmessers, dividirt durch das Rechteck aus den halben Axen.

III. Auch ist $MR^2 : CS^2 = CL^2 : CE^2$ und $CL^2 = MR.\,MN$ (§. 34.), also $CE^2 = \frac{MN.\,CS^2}{MR}$. Durch

Substitution dieses Werthes in I). hat man $\frac{1}{2}$ Mb $=$ $\frac{MN.CS^2}{MR^2}$; d. i. der Krümmungshalbmesser ist gleich dem Produkte aus der Normale in das Quadrat derselben großen Axe, dividirt durch das Quadrat des Lothes MR.

IV. $\frac{1}{2}p = \frac{CL^2}{CS}$ (§. 20. Zus. 3.) $= \frac{MR.MN}{CS}$,

woraus $MR^2 = \frac{\frac{1}{4}p^2.CS^2}{MN^2}$, und durch Substitution in III) $\frac{1}{2}$ Mb $= \frac{MN^3}{\frac{1}{4}p^2}$.

Zusätze. 1. Man hat also vier Ausdrücke für den Krümmungshalbmesser, welche man für jeden einzelnen Kegelschnitt durch Substitution noch näher bestimmen kann.

a) So ist für die Ellipse

$\frac{1}{2}$ Mb $= \frac{NM^3}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{c^3}{2p^2.a^6}\sqrt{}(a^4 - 4a^2u^2 + 4c^2u^2)^3$ (§. 27. Zus.)

$= \frac{1}{2ca^4}\sqrt{}(....)$ indem $p^2 = \frac{c^4}{a^2}$.

$= \frac{1}{2c}\sqrt{}(....)$, wenn $a = 1$.

Ferner, da auch $MN^2 = PM^2 + PN^2 = px - \frac{px^2}{a} + \left(\frac{p}{2} - \frac{px}{a}\right)^2$ (§. 27.), aber x verschwindet,

wenn

wenn M in S fällt, folglich $MN = \frac{1}{2}p$ wird; so ist in diesem Falle der Krümmungshalbmesser $= \frac{MN^3}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{1}{2}p$.

b) Für die Hyperbel ist $MN^2 = px + \frac{px^2}{a} + \left(\frac{px}{a} + \frac{p}{2}\right)^2$ (§. 43.). Daher im Scheitel der Hauptaxe der Krümmungshalbmesser wieder $= \frac{1}{2}p$.

c) Für die Parabel ist $MN^2 = px + \frac{1}{4}p^2$ (§§. 12. 5), folglich der Krümmungshalbmesser in demselben Falle wieder $= \frac{1}{2}p$, also dem doppelten Abstande des Brennpunktes oder der Direktrix vom Scheitel der Curve gleich (§. 5. Zus. 5. und §. 8.).

2. Also ist in Ansehung dieser 3 Curven, sobald der Krümmungskreis sie in einem der Scheitel der Axen berührt, dessen Durchmesser $= \frac{1}{2}p.2$, oder dem Parameter der fraglichen Axe gleich. Sobald also jene Curven einerley Parameter der Axe haben, so haben sie auch für den Scheitel gleiche Krümmungskreise.

3. Schon aus der Erklärung §. 55. sieht man ein, daß man in Praxi statt des Bogens der Curve den Bogen des Krümmungskreises setzen könne. So kann man einen sphärischen Hohlspiegel statt eines parabolischen setzen, weil der Durchmesser des Krümmungskreises für den Scheitel der Parabel ihrem Parameter gleich

ist, daher für beyde Spiegel einerley Brennpunkts-Abstand statt findet.

II.

Von einigen andern Curven.

---

§. 57. Nähere Eintheilung der Curven.

Die Gleichungen für die Kegelschnitte pflegt man allgemeiner auszudrücken. Z. B.

1) $y^{m+1} = ax^m - x^{m+1}$ für den Kreis;

2) $y^m = p^{m-1}x$ für die Parabel;

3) $ay^{m+n} = px^m (a \mp x)^n$ für die Ellipse und Hyperbel.

Setzt man in der ersten Gleichung $m = 1$, so entsteht die Gleichung für den gemeinen Kreis; setzt man in der zweyten $m = 2$, so entsteht die Gleichung für die gemeine Parabel; setzt man in der dritten $m = 1$ und $n = 1$; so hat man die Gleichungen für die gemeine Ellipse und Hyperbel. Diese 3 Curven heißen unter dieser Voraussetzung die conischen, quadratischen oder auch die apollonischen Curven, weil Apollonius, ungefehr ums Jahr 247 vor C. G. zu Perga in Pamphilien geboren, ein berühmtes Werk über die Kegelschnitte geschrieben hat.

Setzt

Setzt man aber andere Werthe für m und n in obigen Gleichungen; so entstehen andere Curven, und alle zur ersten, oder zweyten, oder dritten Gleichung gehörigen Curven bilden eine eigene Familie, oder ein besonderes Geschlecht. Eine Curve ist also vom 4ten Geschlechte, wenn ihre Gleichung n + 1 Abmessungen hat. Die Kegelschnitte gehören daher zum ersten Geschlechte. Die Curven dieser 3 Geschlechter pflegt man wieder nach Arten abzutheilen. Das diese Unterabtheilung betreffende Merkmal nahm Euler aus der Natur und Zahl der Aeste einer Curve. Nach ihm giebt es also drey Arten von Curven ersten Geschlechtes; die erste Art hat keine ins Unendliche auslaufende Aeste, die zweyte 2, die dritte 3 solche Aeste. Von den Curven des zweyten Geschlechtes, oder der dritten Ordnung zählt Euler 16, Newton aber, weil er zugleich auf mehrere Verschiedenheiten der Figur dieser Curven Rücksicht nahm, 72 Arten; von den Curven vierter Ordnung zählt ersterer 146 Geschlechter auf, wovon jedes Geschlecht wieder mehrere Arten unter sich begreife.

§. 58. Aehnlichkeit der Curven.

Man nennt krumme Linien überhaupt ähnlich, wenn die beständigen Größen in den sie bestimmenden Gleichungen einerley Verhältniß zu einander haben. So sind alle Kreise sowohl, als alle Parabeln einander ähnlich, weil ihre Gleichungen nur eine beständige Größe haben.

Wenn man mit den älteren Mathematikern jeden Kegelschnitt auf die Direktrix bezieht; so betrachtet man das Verhältniß des Abstandes irgend eines Punktes der Curve vom Brennpunkte zum Abstande desselben Punktes von der Direktrix als das bestimmende Verhältniß, so, daß, wenn dieses für mehrere Curven gleich ist, diese ähnlich genannt werden. So ist für jede Parabel das Verhältniß FM: MQ (Fig. 3.) ein Verhältniß der Gleichheit, folglich alle Parabeln ähnlich. Da man nun bey der Ellipse den Abstand des Brennpuuktes vom Scheitel S kleiner, bey der Hyperbel größer nimmt, als den Abstand dieses Punktes von der Direktrix; so sagt man, daß, wenn im ersten Falle in Ansehung mehrerer Ellipsen jenes Verhältniß der kleineren Ungleichheit, und in diesem Falle bey Hyperbeln jenes Verhältniß der größeren Ungleichheit gleich ist, die Ellipsen oder die Hyperbeln einander ähnlich seyen.

§. 59. Begriff der Evolute.

Fig. 18.

Um eine gegebene Curve BDE sey an ihrer konvexen Seite ein vollkommen beugsamer Faden EDBA so gewunden, daß derselbe genau anschließe, und der übrige Endtheil BA in eine gerade, die Curve in B berührende, Linie gespannt bleibe. Wird nun dieser Faden so abgewickelt, daß der schon abgewickelte Theil in derselben Ebene beständig gerade gespannt bleibt,

wie

wie der vom Bogen BD schon abgewickelte Theil DM; so wird eine krumme Linie AMm durch Abwickelung der Linie BDE erzeugt, und BDE heißt die zu AMm gehörige Evolute.

Aus der Art der Abwickelung erhellt, daß der Faden in jeder Lage eine Tangente der Evolute, und der schon abgewickelte Theil DM so groß sey, als der abgewickelte Bogen BD mit dem, über den Anfangspunkt B in der Richtung der Tangente hervorragenden, Theile AB zusammengenommen. Es ist weiter klar, daß, für jeden Punkt, oder unendlich kleinen Bogen a der durch Abwickelung erzeugten Curve ein anderer Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt statt finde. Die diese Krümmungsmittelpunkte jungirende Linie ist aber mit der Evolute einerley, so, daß die für die Linie der Krümmungsmittelpunkte in Ansehung der gegebenen Curve AMm gefundene Gleichung dieselbe ist für die Evolute BDE.

Es ist also der abgewickelte und geradgespannte Theil des Fadens DM in jeder Lage im Krümmungshalbmesser der durch Abwickelung erzeugten Linie.

Das Loth MF auf die Tangente für M, und das mF in Beziehung auf m, beyde Normale verlängert, bis sie sich in F schneiden, bilden einen Winkel MFm, den man die Amplitude des Bogens Mn nennt. Gleicher Weise ist der Winkel DOE

der

der sich in O schneidenden Normalen die Amplitude für den Bogen DE. Sind nun Mm, DE 2 so zusammengehörige Bogen, daß Mm durch Abwickelung von DE entstanden ist; so haben sie einerley Amplitude. Denn $MFm = 180° - DFE = DOE$.

A.

Curven höherer Ordnung.

a.

Die Cissoide des Dioeles.

Fig. 19.

§. 60. **Erklärung.** Auf dem Durchmesser AB eines Kreises steht in einem Endpunkte die Tangente BD; nimmt man nun auf dieser willkührlich Punkte D, zieht die Sekanten DA, DA... und macht immer $AM = DE$; so ist die durch diese gefundnen Punkte M gehende Curve die Cissoide.

§. 61. Aufgabe. Eine Gleichung für die Cissoide zu finden.

Auflösung. Es sey $MP = y$, $AP = x$, $AB = a$; so ist $AP : AB = PM : BD$, oder $BD = \frac{a.y}{x}$. Eben so $AP : AB = AM : AD$, oder $AD = \frac{a.AM}{x}$.

Aber

Aber AD : BD : DE (G. §. 126. III.) d. i. $BD^2 =$

$AD.DE = \frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a.AM^2}{x}$. Da nun $AM^2 =$

x^2+y^2; so hat man $\frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{(x^2+y^2)a}{x}$, woraus

1) $ay^2 = x^3+xy^2$; 2) $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$.

Zusätze. 1. Wegen x^3 und xy^2 ist also die Cissoide eine Curve der dritten Ordnung und des zweyten Geschlechtes.

2) Die Gleichung giebt $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$, und diese doppelten Werthe entstehen, wenn man die Zeichnung für den andern Halbkreis macht.

3. Aus dieser letzten Gleichung und schon aus der Zeichnung ist klar, daß y zwar Anfangs schnell wachse, wenn x wächst, indem der Divisor $a-x$ immer kleiner wird; aber dieß ist nur so lange der Fall, bis $x = a$ wird, wo dann $y = \infty$. Allein für größere positive x sowohl, als auch für negative x ist abermal y unmöglich. Denn ist $x > a$; so wird wegen des negativen Divisors, $\frac{x^3}{a-x}$ negativ; dieses ist wegen des dann negativen Dividends der Fall, wenn $x = -x$ ist.

4. Aus Zus. 3. sieht man ferner ein, daß sich die Cissoide an jeder Seite des Durchmessers mit einem

Aste

Aste über alle Grenzen ausbreitet, daß folglich diese Aeste immer näher an BD herangehen, ohne BD zu erreichen. Diese Tangente ist also wahre Asymptote der Cissoide.

5. Es ist auch $y^2 = \frac{x^4}{ax - x^2}$ und $y = \frac{x^2}{\sqrt{(ax - x^2)}}$

d. i. $PM = \frac{AP^2}{PF}$ (§. 3.); aber auch $AP = \frac{PF^2}{BP}$; folglich ist $BP : PF = PF : AP = AP : PM$, d. i. $BP : PF : AP : PM$.

Nimmt man also als Forderungssatz an, daß, wenn der Durch- oder Halbmesser des zur Cissoide gehörigen Kreises gegeben ist, diese selbst geometrisch beschrieben werden könne; so dient die Cissoide, das berühmte Delische Problem (G. S. 122 und S. 204.) zu lösen.

Bezeichnen nämlich m und p die äußersten der 4 geometrisch stetigen Proportionallinien; so nehme man $BC = m$ als Halbmesser des Kreises, und C als Mittelpunkt; zeichne den rechten Winkel BCM', nehme $CQ = p$; verzeichne die Cissoide $M'AN$, verlängere BQ bis M', und ziehe MA; so wird der von dieser verlängerten AM aus der verlängerten CQ abgeschnittene Theil CR die erste von den gesuchten mittleren Proportionallinien zwischen m und p seyn.

Denn zieht man in gleicher Entfernung von C die Linien MF, KE; so ist $PF = KE$, d. i. KE die

mitt-

mittlere Proportionallinie zwischen BP und PM. Nun ist aber die gesuchte zwischen m und p in dem Verhältniße BP: BC oder AK: AC kleiner, als KE; aber auch vermöge der Konstruktion AK: AC = KE: CR, also ist CR die erste der gesuchten mittleren Proportionallinien, welche der Auflösung jenes Problems Genüge leistet.

b.

Die Muschellinie des Nicomedes.

Fig. 20.

§. 62. Erklärung. Wenn man auf den geraden Linien CM, CM′; Cm, Cm′, welche alle durch einen Punkt C der Linie CA unter einem unbestimmten Winkel gehen, und eine auf CA senkrechte Linie BT in Q, Q′ ... schneiden, die Theile QM, Q′M′ ... einer beständigen Linie EA gleich macht; so liegen alle Punkte M, M′ ... in einer Curve, welche die Muschellinie des Nicomedes heißt. BT nennt man ihre Axe (die Alten nannten BT die Direktrix der Conchoide), C den Pol; die Konstante EA = ED (von den Alten Sagitta genannt) kann man den Parameter der Conchoide nennen.

Nicomedes bediente sich dieser Curve zur Auflösung eben jenes Delischen Problems.

§. 63.

§. 63. Aufgabe. Eine Gleichung für die Conchoide zu finden, wenn ihr Parameter und die Entfernung CD des Pols C von der Axe BT gegeben sind.

Auflösung. Man setze $EA = a$; $CE = b$; $MR = EP = x$; $ER = PM = y$; also ist $QR = \sqrt{(QM^2 - MR^2)} = \sqrt{(EA^2 - MR^2)} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, und $EQ = y - \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Weil EQ $\parallel$ PM, so ist $CE : EQ = CP (= CE + EP) : PM$, oder $b : y - \sqrt{(a^2 - x^2)} = b + x : y$; also $\sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{xy}{b+x}$, und $a^2 - x^2 = \frac{x^2 y^2}{(b+x)^2}$.

Dieß giebt 1) $y^2 = \frac{(b+x)^2 (a^2 - x^2)}{x^2}$, und

2) $x^4 + 2bx^3 + (y^2 + b^2 - a^2) x^2 - 2a^2 bx - a^2 b^2 = 0$, die Gleichung für die Conchoide.

Zusätze. 1. Also ist die Muschellinie eine Curve der vierten Ordnung, und des dritten Geschlechtes.

2. Aus der Gleichung 1) erhellt, daß jedem x zwey gleiche entgegengesetzte y zugehören, und daß die Conchoide in 2 Hälften getheilt werde.

3. Ist $x = 0$, so wird $y = \infty$.

4. Ist $x > a$; so wird y eine imaginäre Größe, oder es findet keine Ordinate statt.

5. Setzt

5. Setzt man — x statt + x; so erhält man dieselbe Gleichung. Dieß zeigt an, daß man auf der entgegengesetzten Seite noch eine zur vorigen gehörige Conchoide habe. Die Muschellinie besteht daher, wie es auch die Zeichnung giebt, aus 2 voneinander abgesonderten Stücken, und jedes Stück hat ein Paar Aeste, welche sich der Axe BT, gleich einer Asymptote, auf beyden Seiten immer mehr nähern, ohne sie jedoch zu erreichen.

6. Die Gestalt der Conchoide hängt übrigens davon ab, ob EA >, oder <, oder = CE ist.

B.

Transcendente Curven.

Die Cykloide.

Fig. 21.

§. 64. Erklärungen.

1. Wenn sich ein Kreis bDOQ auf einer geraden Linie AB so fortwälzt, daß alle Theile seines Umfanges nacheinander alle Theile der geraden Linie decken, daß folglich, wenn in einer andern Lage des Kreises der Punkt Q sich in P befindet, dagegen aber D in T auf der geraden Linie AB ist, dann der Bogen PT oder QD dem Theile QT der geraden Linie gleich ist; so sieht man ein, daß der Punkt Q während der ganzen Kreisumwälzung eine krumme Linie beschreiben müsse. Da eine solche Curve vom Nagel am Umfange eines Wagenrades, welches über einen vollkommen ebenen Weeg in gleicher Richtung fortrollte, beschreiben würde; so hat man jener Curve den Namen Radlinie, oder Cykloide (cyclois, roulette) gegeben. Der Kreis bDOQ heißt der Generator, Q der beschreibende Punkt, QB die Grundlinie (basis).

Fig. 22.

2. Setzt man, es werde, statt auf einer geradlinigen Grundlinie, auf dem konvexen Theile eines Kreisbogens, oder eines größten Kreises der Kugel ABL, deren Centrum in C, ein Kreis oder Rad, auf der Kugel unter rechten Winkeln aufstehend, bewegt; so beschreibt der im Umfange des Rades befindliche Punkt P eine Curve APSL, welche man Epicykloide nennt.

3. Würde sich aber auf gleiche Weise der Kreis, oder das Rad BPV an der hohlen Seite des Bogens oder der Kugel herumbewegen; so würde P eine Curve beschreiben, welche man die Hypocykloide nennt.

§. 65. Aufgabe. Eine Gleichung für die Radlinie zu finden.

Fig. 21.

Auflösung. Sobald QB der halben Peripherie des Generators gleich wird, ist Q in F und b in B. Man fälle aus irgend einem Punkte P der Cykloide das Loth PM auf FB. Da nun hier QT = arc. TP = arc. BL (wie Fig. 22. bey der Epicykloide AB = PB), so ist QB — QT = TB = FLB — BL = arc. FL. Aber auch TB = PM — PN = PM — ML = PL, also der Bogen LF = PL.

Hier-

Hieraus ist ersichtlich, daß man, wenn auf den durch alle Punkte des Halbkreises FLB mit der Grundlinie QB parallel gezogenen Linien Theile LP gleich LF genommen würden, jederzeit einen Punkt P der Cykloide erhalten müßte.

Weil also von der Länge der Bogen LF die Größen LP abhängen; so könnte man jene Bogen wie x, d. i. wie Abscissen betrachten, denen LP oder die Ordinaten y entsprächen. Demnach würde $x = y$ die Gleichung für die Radlinie seyn, wodurch zugleich die Unbestimmbarkeit der Natur der Cykloide aus dieser von allen Konstanten entblößten Gleichung einleuchtete.

Setzt man aber, der Analogie wegen, jedes FM $= x$, und die rechtwinklige Ordinate auf dem Durchmesser 2a des Generators, nämlich $PM = y$; so ist $y = LM + PL$, aber $LM = \sqrt{(2ax - x^2)}$ (§. 3.); $PL =$ arc. LF, dessen Sin. LM, und Quersinus MF $(= x)$ für den Halbmesser a ist; folglich hat man

$$y = \sqrt{(2ax - x^2)} + a.\ \text{arc.Sin. v.}\ \frac{x}{a},\ \text{oder}$$

$$y = \sqrt{(2ax - x^2)} + a.\ \text{arc. Sin.}\ \frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{a}$$

(T. S. 338. Zus. 2. und 5.), die gesuchte Gleichung.

Zusätze. 1. Weil x ein gegebener Bogen, und y eine gerade Linie seyn soll, die dem Bogen x gleich ge-

gemacht wird, wozu eigentlich die Rektifikation des Kreises erfordert wird; so sieht man ein, daß die vorige Gleichung eigentlich keine algebraische ist. Da sich ferner der Generator vor der Stellung in BLF unzähligemal umgewälzt haben kann; so giebt es auch keine bestimmte Anzahl von Werthen für y; die Cykloide ist also eine transcendente Curve.

2. Die Gleichung gilt unter der Voraussetzung, daß der Sinus des mit der Abscisse zusammengehörigen Bogens für eben den Halbmesser a genommen werden soll, welcher dem Bogen zugehört. Man kann aber auch jenen Sinus für einen Halbmesser b nehmen, welcher kleiner oder größer ist, als der Halbmesser a; wo denn die Gleichung gilt:

$$y = \sqrt{(2bx - x^2)} + a.\ \text{arc. Sin.} \frac{\sqrt{(2bx - x^2)}}{b}.$$

Ist nun $b > a$, oder $Cg > CF$; so heißt die Cykloide die verkürzte (contracta); eine solche stellt man sich von einem, am Umfange eines Rades hervorstehenden, Nagel beschrieben vor; ist $b < a$, oder $Ce < CF$; so entsteht die verlängerte (protracta) Cykloide; — ist $b = a$, so heißt sie die gemeine (vulgaris). Diese macht durch ihre beyden Aeste eine Spitze; die zweyte hat blos einen Wendungspunkt; die dritte oder erste macht einen Knoten, wie die Figur deutlich zeigt.

Fig. 22.

§. 66. Lehrsatz. Bey Beschreibung einer Epicykloide oder Hypocykloide ist die Länge AP des Weeges welchen ein Punkt P am Umkreise des Rades BPV, während es von seinem ersten Berührungspunkte A aus durch B gegen L umgewälzt wurde, beschreibt, zum doppelten Quersinus des halben Bogens BP, welcher die Kugel während dieser Umwälzung berührte, wie die Summe, oder, in Ansehung der Hypocykloide, wie der Unterschied der Durchmesser der Kugel und des Rades zum Halbmesser der Kugel, d. i. wie 2 CE: CB.

Beweis. 1) Die (wenn es nöthig ist, verlängerte) Linie CE begegne dem Rade in V. Man ziehe CP, BP, EP, VP, und fälle auf die verlängerte CP das Loth VF. Für P und V ziehe man die sich in H schneidenden Tangenten VH, PH, welche letztere VF in G schneide. Aus G und H fälle man die Perpendikel HK, GI, auf VP. Endlich beschreibe man aus C mit irgend einem Halbmesser die Kreislinie nom, welche CP in n, den Perimeter Bp des Rades in o, und den von P beschriebenen Weeg in m schneide; aus V, als Mittelpunkt, beschreibe man mit dem Halbmesser Vo eine Kreislinie, die verlängerte VP in q schneidend.

2). Weil nun das Rad, während seines Fortrückens gegen L, sich um den Berührungspunkt B dreht, so ist offenbar die Linie BP auf die, vom Punkte P beschriebene Curve senkrecht, und VP eine Tangente die-

dieſer Curve. Stellt man ſich nun beym Fortbewegen des Rades den Halbmeſſer der Kreislinie nom (für I) allmählig vermehrt, oder (für II.) vermindert vor; ſo wird er zuletzt dem Abſtande CP gleich, und die verſchwindende Figur Pnomq ähnlich werden der Figur PFGVI, folglich wird das Verhältniß der verſchwindenden kleinen Linien Pm, Pn, Po, Pq, d. i. das Verhältniß der momentanen Veränderungen der Curve AP, der Linie CP, des Kreisbogens BP und der geraden Linie VP daſſelbe ſeyn, als das Verhältniß der reſpectiven Linien PV, PF, PG, PI.

3). Da der Winkel CVH = 90°, und aus ihm das Loth VF auf CF gefällt iſt; ſo iſt der Winkel VCF = GVH (G. §. 124.); weil ferner, in der vierſeitigen Figur EPHV, P + V = 180° folglich auch VEP + VHG (und für II. VEP + VHP) = 180° (G. §. 58. Zuſ. 2.) = VEP + CEP (für II. = VHP + VHG); ſo iſt auch VHG = CEP, daher △ VGH ∽ CPE, und EP: CE = HG: HV, oder, da HV = HP (G. S. 118. Anm. 2.) und auch HG: HP = KI: KP; ſo iſt

EP: CE = KI: KP, oder

CE ∓ EP: CE = KP ∓ KI: KP, d. i. für beyde Cykloiden CB: CE = PI: PK, oder CB: 2 CE = PI: 2 PK (= PV), alſo = Pq: Pm (nach dem Vorigen unter 2)); oder die Abnahme der Linie VP., d. i. die Zunahme der Linie BV — VP verhält ſich zur Zunahme der Curve AP = CB: 2 CE, folglich ſind auch die ganzen Längen BV — VP und AP,

welche durch diese Zuwächse erzeugt werden, in demselben Verhältniße.

4). Nimmt man nun im Dreyecke BVP BV als Halbmesser an; so wird das Loth VP auf BP der Cosinus vom Peripheriewinkel BVP $=\frac{1}{2}$ BEP, und, da Sin. v. $\alpha = r - \cos\alpha$, BV — VP der Quersinus desselben Winkels oder des Bogens $\frac{1}{2}$ BP; also ist für dieses Rad, wo $\frac{1}{2}$ BV der Halbmesser ist, BV — VP der doppelte Quersinus desselben Bogens $\frac{1}{2}$ BP, also

AP: 2. Sin. v. $\frac{1}{2}$ BP $=$ 2 CE: CB.

Zusätze. 1. Beschreibt man also eine ganze Epicykloide oder Hypocykloide ASL, und halbirt sie in S; so verhält sich die Länge PS zur Länge VP (welche der doppelte Sinus des Winkels VBP, wenn EB $=$ dem Halbmesser, ist), $=$ 2 CE: CB.

2. Und die Länge des halben Perimeters AS ist gleich der geraden Linie, welche sich zum Durchmesser BV des Rades verhält, wie 2 CE: CB.

§. 67. Aufgabe. Zu machen, daß ein Pendul in einer gegebenen Hypocykloide schwinge.

Fig. 23.

Auflösung. An der hohlen Seite des Kreises, oder der Kugel QVS, deren Mittelpunkt C, sey eine Hypocykloide QRS beschrieben, welche, in R halbirt, der Kugelfläche in den Punkten Q und S begegne.

Man ziehe nun die den Bogen QS in O halbirende Linie CR, und verlängere sie nach A, so, daß CA: CO: CR wird. Aus C mit dem Halbmesser

CA

CA beschreibe man einen äußern Kreis, oder eine äußere Kugel DBAD, an deren hohlen Seite ein Rad, dessen Halbmesser = AO, 2 halbe Cykloiden (Epicykloiden und Hypocykloiden zugleich) AQ, AS beschreibe, welche die innere Kugel in Q und S berühren, und der äußern in A begegnen. Wenn nun das in A aufgehangene Pendul, dessen Länge APT = AR, innerhalb jener Cycloide so umherschwingt, daß der Faden, sobald das Pendul aus seiner senkrechten Lage AR kömmt, mit seinem oberen Theile AP sich an die Cykloide APS, als dem Hinderniße der Bewegung anlegt, der übrige Theil PT des Fadens aber in gerader Linie ausgedehnt bleibt; so wird der schwere Körper T in der gegebenen Cykloide QRS schwingen.

Beweis. Der Faden PT begegne der Cykloide QRS in T, dem Kreise QOS in V, man ziehe CV; so werden die, in den Endpunkten P und T des geraden Theiles des Fadens errichteten, Lothe PB, TW aus CV in B und W Theile BV, VW abschneiden, welche vermöge der Konstruktion und dem Ursprunge der Curven AS, SR den Durchmessern OA, OR der Räder gleich sind, durch deren Umwälzung die Cykloiden entstanden sind.

Nun sind die Dreyecke BPV, TWV ähnlich, daher TV: VP = WV: VB, oder (componendo) TP: VP = WB: VB (wo VP der doppelte Sinus von PBV ist, wenn man $\frac{1}{2}$ BV als Radius

setzt)

setzt) = AO + OR: AO. Aber nach der Voraussetzung ist

CA: CO = CO: CR, oder CA — CO: CA = CO — CR: CO, d. i. AO: OR = CA: CO

und (addendo)

AO + OR: AO = CA + CO: CA. Also ist auch TP: VP = CA + CO: CA = CB + CV: CB = CV + VB + CV: CB, oder (wenn man sich VB in E halbirt denkt) = 2 CV + 2 VE: CB = 2 CE: CB. Also ist die Länge PT des geraden Theiles des Fadens immer gleich dem halben Bogen PS der Cykloide APS (§. 66. Zus. 1.), also die ganze Länge APT = dem halben Bogen APS, d. i. der Länge AR (§. 66. Zus. 2.), folglich umgekehrt: wenn der Faden immer der Länge AR gleich bleibt; so bewegt sich der Körper T in der gegebenen Hypocykloide QRS.

§. 68. Lehrsatz. Wenn die Schwere für irgend einen Ort auf der Erde sich verhält, wie der Abstand dieses Ortes vom Mittelpunkte C der Erde, und die Centripetalkraft es einzig ist, welche den Körper T in der Cykloide QRS schwingen macht; so sind die Zeiten noch so ungleicher Schwingungen gleich.

Beweis. Auf die ins Unendliche verlängerte Tangente TW der Cykloide QRS fälle man das Loth CX, und ziehe CT. Weil nun die auf den Körper einzig wirkende, und ihn gegen C zu treibende Schwere sich verhält, wie CT, und diese Kraft schief auf

T wirkt;

T wirkt; so kann man sie in 2 Kräfte zerlegen, vorgestellt durch CX und TX. Durch CX wird der Faden PT blos in gerader Richtung gespannt, und sie selbst durch dessen Widerstand aufgehoben; also beschleunigt nur der einzige Theil TX, bemüht, den Körper schief oder gegen X zu treiben, als stetig wirkende Kraft, die Bewegung des Penduls in der Cykloide. Die dieser beschleunigenden Kraft proportionelle Beschleunigung dieser Schwungbewegung verhält sich daher in jedem Augenblicke, wie die Länge TX, oder in Ansehung der gegebenen Linien CV, WV, welchen TX, TW proportional sind (indem CW: WV = WX: TW, oder CW + WV: WV = WX + TW: TW), wie die Länge TW, d. i. wie die Länge des Bogens TR (§. 66. Zus. 1.). Setzt man also 2 Penduln APT, Apt, welche aus der senkrechten Lage ungleich weggezogen, zugleich zu schwingen anfangen; so werden sich ihre Beschleunigungen verhalten, wie die zu durchlaufenden Bogen TR, tR.

Nun verhalten sich aber die im Anfange durchlaufenen Theile der Cykloide, wie die Beschleunigungen, d. i. wie die ganzen anfangs zu durchlaufenden Theile; daher verhalten sich auch die noch übrigen zu durchlaufenden Theile und die folgenden, diesen proportionelle, Beschleunigungen, wie die ganzen, u. s. f. Es verhalten sich also die Beschleunigungen, daher auch die durch sie erzeugten Geschwindigkeiten, und die vermöge dieser Geschwindigkeiten durchlaufenen und

noch

noch zu durchlaufenden Theile, wie die Ganzen; folglich werden die noch zu durchlaufenden Theile, indem sie immer im gegebenen Verhältniße zu einander bleiben, zugleich verschwinden, d. i. die zwey oscillirenden Körper T, t werden in demselben Momente in die senkrechte Lage kommen.

Da nun beym Aufwärtsgehen der Penduln vom untersten Punkte R zu Q dieselbe, vorhin den Fall beschleunigende, Kraft, nun die Schwungbewegung auf gleiche Weise retardirt; so folgt, daß die Geschwindigkeiten beym Herab- und beym Aufwärtsschwingen durch dieselben Cykloidenbogen gleich seyen, diese Bewegungen also in gleichen Zeiten geendigt werden; daß folglich, da die auf beyden Seiten des Lothes AR liegenden Theile RS, RQ der Cykloide ähnlich und gleich sind, die 2 Penduln sowohl ihre halben, als ganzen Schwingungen in gleichen Zeiten endigen.

Zusätze. 1. Man sieht hieraus, warum die Cykloide auch die tavtochronische Linie (lin. tavtochrona) genennt werde, weil nämlich alle Schwingungen in ihr, so groß oder klein man auch TR annimmt, von völlig gleicher Dauer sind. Zugleich erhellt, warum man der Cykloide in Ansehung der Schwere auch den Namen der brachystochronischen Linie gegeben hat. Denn sie ist unter allen Curven von gleicher Länge diejenige, durch welche ein blos von der Schwere getriebener Körper in der kürzesten Zeit fällt.

2. Aus dieser Theorie gieng Huygen's Vorschlag hervor, das Gewicht T am Faden AT zwischen cykloidalisch geformten Blechen AP, AP′ herabhängen zu lassen, damit sich der Faden beym Schwunge an diese Bleche anlege, und im Herabfallen davon abwickle. Der Weeg STQ des Gewichtes würde dann die Evolute einer Cykloide, nach welcher die Bleche geformt sind. Denn da man für die Evolute der Cykloide eine ganz ähnliche Gleichung, wie für diese, findet; so ist die Cykloide ihrer Evolute gleich und ähnlich. Allein in Praxi hindern die Steife der Fäden und die Schwierigkeit, die Bleche genau cykloidalisch zu formen, die Vortheile, die der Erfinder erwartete.

III.

Die Quadratur und Cubatur des Flächen- und begrenzten körperlichen Raumes in Beziehung auf die Parabel und Ellipse.

Fig. 4.

§. 69. Aufgabe. Den parabolischen Raum SMLS zu messen, (was man im Allgemeinen auch so ausdrückt: die Parabel zu quadriren, oder die Quadratur jenes Raumes zu finden).

Auflösung. Wenn die Axe SP = 9 Fuß; die größte Ordinate PM = y = 12′, folglich ML = 24′; so wird man den paraboloischen Raum SMLS haben, wenn

wenn man ML mit $\frac{2}{3}$ SP, oder 24 mit 6 multiplizirt; dieser Raum wird also = 144 Quadrat-Fuß seyn.

Beweis. SMLS ist = $\frac{2}{3}$ vom Rechtecke ME. Denn der Flächenraum LESK ist = $\frac{1}{3}$ EP, was man auf folgende Art einsieht:

a) Denkt man sich die Höhe *h* eines gleichschenkligen Dreyecks in unendlich viele gleiche Theile getheilt vor, und durch jede 2 nächste Theilpunkte und den entsprechenden Punkten der Schenkel des △ ebene Flächen gelegt vor; so fallen diese unendlich kleinen parallelen Ebenen mit ihren Grenzen, oder jede mit ihrer Grundlinie zusammen. Nun wachsen aber diese von der Spitze des △ gegen dessen Grundseite *b* zu immer um denselben Theil; folglich bilden diese unendlich kleinen Ebenen, oder ihre Grundlinien eine arithmetische Progression von 0 an bis zur größten Linie, welche des △ Grundseite ist. Daher giebt die Summation der Glieder dieser Progression den Flächeninhalt des Dreyecks; es ist aber dieser = $\frac{1}{2}$ h. b; folglich erhält man die Summe jener Glieder, wenn man die größte Seite (b) mit der halben Höhe, d. i. mit der halben Größe multiplizirt, welche die Menge jener unendlich kleinen Ebenen oder ihrer Grundlinien anzeigt.

b) Man stelle sich eine senkrechte Pyramide, deren Grundfläche b^2 ein Quadrat ist, von einer durch die Axe *h* mit einer Seite der Grundfläche parallel gehenden Ebene geschnitten vor; so ist der Schnitt ein gleichschenkliches Dreyeck, wo folglich nach a) die unendlich kleinen Ebenen oder deren Grundlinien, mit welchen sie zusammenfallen, in einer arithmetischen Progression stehen. Denkt man sich nun durch jede 2 nächste Theilpunkte der Axe mit der Grundfläche der Pyramide parallele Ebenen gelegt; so wird jedes, von diesen Ebenen und den entsprechenden Theilen der Seitenflächen der Pyramide begrenzte, unendlich kleine Prisma mit seiner Grundfläche zusammenfallen, so, daß man diese für das Prisma neh-

men kann. Jede dieser Grundflächen ist aber ein Quadrat, dessen Seite jedesmal gleich ist einer jener parallelen Grundlinien im gleichschenklichen Dreyecke; d. i. man hat unendlich viele Quadrate, deren Seiten alle in einer arithmetischen Progression stehen. Nun erhält man aber die Solidität der Pyramide aus $b^2 . \frac{1}{3} h$ (G. 180.); folglich erhält man auch die Summe aller jener unendlich kleinen Prismen, oder der Quadrate, mit welchen, als Grundflächen sie zusammen fallen, und deren Seiten in einer arithmetischen Progression sind, wenn man das Quadrat der grösten Seite mit dem dritten Theile derjenigen Grösse multiplizirt, welche die Menge jener Seiten oder der Quadrate ausdrückt.

c). Man stelle sich nun SE in gleiche Theile, wie SG, SI . . . getheilt vor, und die mit der Axe parallelen Linien GH, IK . . . gezogen; so verhalten sich die Quadrate von SG, SI . . wie GH: IK . . . (§. 5. Zus. 1.). Aber die Theile auf SE sind in einer arithmetischen Progression, also sind die Quadrate der Linien SG, SI die Quadrate der Glieder einer arithmetischen Progression; folglich sind die Glieder GH, IK . . . in demselben Verhältniße, wie die Quadrate der Glieder einer arithmetischen Progression. Also kann man sich nach a) den Raum LESK aus unendlich vielen Ebenen bestehend denken, welche, indem sie alle mit ihren Grundlinien zusammenfallen, in demselben Verhältniße sind, wie die Quadrate der unendlich vielen Glieder einer arithmetischen Progression.

Nun muß man aber nach b), um die Summe aller dieser Quadrate zu haben, das grösste Quadrat mit dem dritten Theile der Grösse multipliziren, welche die Menge jener Glieder ausdrückt, folglich muß man auch, um den Raum LESK zu haben, die grösste Grundlinie EL mit $\frac{1}{3}$ ES multipliziren; aber EL. ES = dem Rechtecke SL, folglich ist jener Raum $\frac{1}{3}$ SL, also der paraboli-sche Raum LKSP = $\frac{2}{3}$ SL.

Fig.

Fig. 3.

§. 70. Lehrsatz. Wenn man die Subnormale NP = 1, den Parameter = 2, folglich den Abstand des Brennpunktes vom Scheitel SF = $\frac{1}{2}$, und die Abscisse SP = x = $\frac{y^2}{p} = \frac{PM^2}{2}$ setzt; so ist der parabolische Abschnitt SMFS zwischen dem Bogen SM, dem Radius vektor MF und jenem Abstande SF gleich $\frac{1}{12}$ $PM^3 + \frac{1}{4}$ PM.

Beweis. SMFS = SMS + SMF. Aber SMS = SMPS — SPM = $\frac{2}{3}$ SP. PM (§. 69.) — $\frac{1}{2}$ SP. PM = $\frac{1}{3}$ $PM^3 - \frac{1}{4}$ $PM^3 = \frac{1}{12}$ PM^3. Ferner der Flächenraum SMF = $\frac{1}{2}$ SF. PM (indem SF die Grundseite, und PM die Höhe ist) = $\frac{1}{4}$ PM; also SMFS = $\frac{1}{12}$ $PM^3 + \frac{1}{4}$ PM.

§. 71. Aufgabe. Die Ellipse zu quadriren, oder ihren Flächenraum zu finden.

Fig. 6.

Auflösung I. Es verhält sich die Ordinate der Ellipse zur Ordinate des umgeschriebenen Kreises, wie die kleine Axe zur großen (§. 19. Zus. 6); also sind auch die Summe aller Ordinaten der Ellipse und die Summe aller Ordinaten des Kreises in demselben Verhältniße, d. i. der Flächenraum α der Ellipse verhält sich zum Flächenraume A des Kreises, = c : a, d. i. $\alpha = \frac{Ac}{a}$, oder da A = $\frac{aP}{4}$ (wenn P die Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser a ist, bezeichnet, G. §. 143.), $\alpha = \frac{Pc}{4}$; d. i. der Flächenraum der Ellipse ist gleich der Peripherie des umgeschriebenen Kreises, mit dem 4ten Theile der kleinen Axe multiplizirt.

Setzt

Setzt man $a\pi$ statt P, wo π die Ludolph'sche Zahl bedeutet (S. §. 141. Zus.); so ist $\alpha = \frac{1}{4} a\pi c = \frac{1}{4} a\pi \sqrt{ap}$ (§. 20. Zus. 3) $= \frac{1}{4} a\pi \sqrt{(a^2 - 4e^2)}$ (§. 22. II.) $= \frac{1}{4}\pi \sqrt{(1 - 4e^2)}$, wenn $a = 1$.

Zusatz. Entsprechende Ausschnitte der Ellipse und des Kreises verhalten sich, als ähnliche Theile von den Ganzen, $= c : a$.

Auflösung II. Denkt man sich auch einen Kreis eingeschrieben, welcher also die kleine Axe Ll zum Durchmesser hat, und nennt man dessen Flächenraum A; so ist

$\alpha : A = c : a$ und $\alpha : \mathfrak{A} = a : c$, daher

$A : \alpha = \alpha : \mathfrak{A}$; d. i. der Flächenraum der Ellipse ist die mittlere Proportionallinie zwischen 2 über ihre Axen beschriebenen Kreisen. Oder setzt man statt der Kreise die Quadrate ihrer Durchmesser, so ist $Ss^2 : \alpha : Ll^2$, und statt des Flächenraumes α des Kreises, welcher den Flächenraum der Ellipse giebt, das Quadrat seines Durchmessers D gesetzt; so hat man $Ss^2 : D^2 : Ll^2$, oder $a : D : c$, d. i. der Flächenraum der Ellipse ist gleich dem Flächenraume des Kreises, dessen Durchmesser die mittlere Proportionallinie zwischen den Axen der Ellipse ist.

Zusatz. Also verhalten sich die Flächenräume zweyer Ellipsen, wie die Rechtecke aus den Axen. Denn $Ss . Ll = D^2$, eben so $\Sigma\sigma . \Lambda\lambda = \delta^2$. Aber die Flächenräume dieser Kreise, die D und δ zu Durchmesser haben, verhalten sich, wie $D^2 : \delta^2$, folglich verhalten sich eben so die Flächenräume der Ellipsen, welche durch jene Flächenräume ausgedrückt werden, also auch wie die genannten Rechtecke.

§. 72. Aufgabe. Den Abschnitt s der Ellipse zu finden.

Auflösung. Entweder ist die Grundlinie dieses Abschnittes s die doppelte Ordinate der großen oder der kleinen Axe; in jenem Falle sucht man das entsprechende

Seg-

Segment S des umgeschriebenen Kreises, in diesem Falle das Segment σ des eingeschriebenen Kreises (G. §. 144), und schließt im ersten Falle a: c = S: s, und im 2ten c: a = σ: s.

Zusatz. Auf dieselbe Weise findet man auch die Ausschnitte der Ellipse (vergl. §. 71. I. Zus.).

§. 73. Aufgabe. Eine Ellipsoide zu kubiren, oder die Solidität eines elliptischen Sphäroids, entstanden aus der Umwälzung einer Ellipse um ihre große Axe, zu finden.

Fig. 1.

Auflösung. Zieht man in gleichen, unendlich nahen, Abständen willkührlich viele Ordinaten Db, Pm..., bis an den umgeschriebenen Kreis verlängert, und stellt sich nun die Figur um Ss bewegt; so wird sowohl eine Kugel, als eine in dieser enthaltene Ellipsoide entspringen; die Ordinaten Db, DB, Pm, PM... werden Kreise beschreiben, welche die Grundflächen von lauter geraden Cylindern mit gleichen (unendlich kleinen) Höhen sind (vergl. G. §. 176). Diese Cylinder verhalten sich folglich, wie ihre Grundflächen (G. §. 169. Zus. 1.), d. i. jeder der zur Kugel gehörigen Cylinder, wie DBS verhält sich zum entsprechenden DbS der Ellipse, wie $BD^2 : Bb^2$, oder wie $C\lambda^2 : Cl^2$ (§. 20. Zus. 6.); eben so $DBMB : DbmP = C\lambda : Cl^2$ u. s. w.; d. i. die Summe aller die Kugel konstituirenden Cylinder, oder die ganze Kugel S, verhält sich zur Summe der elliptischen Cylinder, oder der Ellipsoide E, wie das Quadrat der halben großen Axe zum Quadrat der halben kleinen Axe, oder $E = \frac{S.\,Cl^2}{C\lambda^2}$. Aber $\mathfrak{A} : A = Cl^2 : C\lambda^2$ (nach der Bezeichnung im §. 71), und die Solidität der Kugel $S = \frac{2}{3} A.\,2CL = \frac{2}{3} A.\,Ss$ (G. §. 183, wo aber d^3 statt d^2 und $4r^3$ statt 4^3 zu lesen ist); also durch Substitution ist $E = \frac{2}{3} a\mathfrak{A}$; d. i. das elliptische Sphäroid ist gleich 2 Drittheilen des

Pro-

Produktes aus der großen Axe der Ellipse in den Flächenraum des über ihre kleine Axe beschriebenen Kreises.

Oder, da $A = \frac{1}{4} cP$, folglich $E = \frac{1}{6} acP$, die Solidität der Ellipsoide gleicht dem Produkte aus dem Rechtecke der Axen in den 6ten Theil der Peripherie des eingeschriebenen Kreises.

Zusätze. 1. Denkt man sich einen Cylinder um die Ellipsoide geschrieben, dessen Höhe folglich $= Ss$, und dessen Durchmesser $= Ll$, so, daß also seine Solidität $= \frac{1}{4} cP. a$ (G. §. 178. Zus. 1.) ist; so wie der Kegel mit derselben Grundfläche und Höhe $= \frac{1}{12} cP. a$ (G. §. 180. Zus. 1.); so verhält sich die Ellipsoide zu diesem Cylinder und Kegel $= \frac{1}{6} acP : \frac{1}{4} acP : \frac{1}{12} acP$ d. i. $= 2 : 3 : 1$.

2. Wenn man sich Ordinaten, wie nop, n′o′p′..., sowohl zur Ellipse, als zum eingeschriebenen Kreis gehörig, auf die kleine Axe Ll senkrecht gezogen, und nun die Figur um Ll gewälzt vorstellt; so entsteht die komprimirte Ellipsoide und eine Kugel. In Ansehung beyder Körper läßt sich auf dieselbe Art, wie vorhin, beweisen, daß sich die über die kleine Axe beschriebene Kugel s zur komprimirten Ellipsoide ε verhalte, wie das Quadrat der halben kleinen Axe zum Quadrat der halben großen Axe, oder daß $\varepsilon = \frac{s. C\lambda^2}{CL^2} = \frac{sA}{A}$ (wie oben); aber $s = \frac{2}{3} Ac$ (G. §. 176. Zus. 2.); also $\varepsilon = \frac{2}{3} Ac$; d. i. die komprimirte Ellipsoide gleicht 2 Drittheilen des Produkts aus der kleinen Axe in den Flächenraum des umgeschriebenen Kreises.

3. Da die Erde die Gestalt eines eingedrückten Sphäroids hat; so findet man den körperlichen Inhalt der Erde aus der Proportion: Das Quadrat der halben

den Erdaxe verhält sich zum Quadrat des Halbmessers des Aequators, wie die Kugel, deren Durchmesser die Erdaxe ist, zur Solidität der Erde.

§. 74. Aufgabe. Eine Paraboloide zu kubiren, oder die Solidität eines aus der Umwälzung der Parabel um ihre Axe erzeugten paraboliſchen Conoids zu finden.

Fig. 4.

Auflösung. Die von PM oder PL bey der Umwälzung beſchriebene Kreisfläche wird die Grundfläche der Hyperboloide: multiplizirt man dieſe Grundfläche mit der halben Axe oder Höhe SP; ſo erhält man den verlangten körperlichen Inhalt.

Beweis. Man kann ſich, wie oben, ſo auch hier die paraboliſche Conoide aus lauter Cylindern von unendlich kleiner Höhe beſtehend denken. Dieſe Cylinder fallen mit den Kreiſen, welche ihre Grundflächen bilden, zuſammen. Nun verhalten ſich dieſe Kreiſe, wie die Quadrate ihrer Halbmeſſer z. B. ic, PM . . . Aber aus der Eigenſchaft der Parabel iſt $ic^2 : PM^2 = Si : SP$, folglich wachſen jene Kreisflächen von o oder S bis zur größten von PM im Verhältniße der Abſciſſen. Dieſe wachſen aber wie die natürlichen Zahlen, alſo bilden auch die Kreisflächen eine ſolche arithmetiſche Progreſſion, deren erſtes Glied = o, deren letztes = der Kreisfläche vom Halbmeſſer PM, und wo die Anzahl der Glieder durch die Höhe PS ausgedrückt iſt. Man erhält alſo die Summe aller dieſer Glieder, oder die Solidität der paraboliſchen Conoide, wenn man jene größte Kreisfläche, als Grundfläche, mit $\frac{1}{2}$ SP multiplizirt (B. §. 99. Zuſ. 1.).

Grundriß

der Astronomie.

Einleitung.

Begriff der Astronomie und Eintheilung der Himmelskörper.

§. 1. Astronomie (von ἀστήρ, Stern, und νόμος, Gesetz) ist die Wissenschaft von den Gesetzen der Sterne, oder des Weltgebäudes überhaupt, und der dasselbe ausmachenden Welt- oder Himmelskörper.

Der Erfahrung folgend, theilten schon die Alten die Himmelskörper in Fixsterne, Planeten und Cometen.

1. Diejenigen Sterne, welche immer in derselben Lage gegeneinander und in derselben Weite voneinander, daher wie an dem Himmelsgewölbe festgeheftet dem Auge erscheinen, heißen Fixsterne. Nach der Anzahl dieser Sterne, welche man mit dem 20füßigen Herschel'schen Teleskop auf einem Raume von einigen Graden sieht, rechnet man die unzähligen Fixsterne auf 75 Millionen. Um sie kenntlicher zu machen, theilt man sie in Sterne erster, zweyter, dritter ... Größe. Zur ersten Klasse rechnet man überhaupt 24 Sterne, und Sterne 7ter Größe sind nicht mehr dem blosen Auge sichtbar.

Einzelne Gruppen von Fixsternen nannten schon die Alten Constellationen (αστρα), Sternbilder, dergleichen wir heutzutage über 100 zählen; die Griechen aber zählten 48, höchstens 50 Constellationen, wenn man den Antinous und das Haupthaar der Berenice mitrechnet. Unter den Sternbildern sind die des Thierkreises (Zodiacus) die berühmtesten. Von ihnen haben die Zeichen der Ecliptik, mit welchen jene Constellationen ehemals, zu den Zeiten des Hyparch's (über 100 J. vor der christl. Zeitr.), würklich übereinkamen, ihren Namen. Diese Zeichen mit den Nämen der Sternbilder, so wie sie von Westen nach Osten aufeinander folgen, sind: Widder ♈, Stier ♉, Zwillinge ♊, Krebs ♋, Löwe ♌, Jungfrau ♍, Wage ♎, Scorpion ♏, Schütze ♐, Steinbock ♑, Wassermann ♒, Fische ♓.

Die Geschichte meldet auch das Wiedererscheinen und Wiederverschwinden neuer merkwürdiger Sterne. Der berühmteste dieser Art war der im J. 1572 am Stuhle der Cassiopeja von Tycho von Brahe beobachtete sehr glänzende Stern; sein Glanz nahm aber bis zum März 1574 immer mehr ab, bis er endlich ganz verschwand. Auch giebt es Sterne mit periodischen Lichtabwechslungen. Im Schwan beobachtete man 3 in Ansehung ihrer Größe veränderliche Sterne. Auch das Haupt der Medusa, Algol im Perseus, ist gewöhnlich von der zweyten Größe, zuweilen aber nur von der fünften. Für die wahrscheinlichste Ursache dieser

ser Erscheinungen hält Lalande mit Riccioli und Boulliaud die Existenz solcher Sterne, welche nicht ihrer ganzen Größe nach eigenes Licht haben, gleichsam halb Sonne, halb Planet sind, welche uns daher bald einen größeren, bald einen kleineren dunklen Theil vermöge ihrer Rotation zuwenden können.

Noch giebt es endlich solche Stellen am Himmel, welche mit Teleskopen betrachtet, einen breiten und irregulären weislichen Schimmer haben, in welchem man entweder kleine oder gar keine Sterne erblickt. Diese Stellen nennt man Nebelsterne. Der merkwürdigste ist der Nebelstern unter dem Gürtel des Orions, von Huygen zuerst 1656 zufällig bemerkt, mit 7 kleinen Sternen. Herschel gab 1786 und 89 ein Verzeichniß von 2000 Nebelsternen heraus.

Die Sternkenntniß (Astrognosia) ist in unseren Tagen durch genaue Sternverzeichnisse, Sternkarten, Sternkegel, Himmelskugeln und durch gedruckte Anleitungen vorzüglich erleichtert worden. Indem wir besonders der Bemühungen eines Bode rücksichtlich dieses Gegenstandes dankbarst gedenken; dürfen wir des schönen und nützlichen Himmelsatlasses nicht vergessen, welcher, auf der Seeberger Sternwarte revidirt, von Goldbach (1799 im Industrie-comptoir zu Weimar) herausgegeben wurde. Dieser Atlas, in einer neuen Manier, mit doppelten schwarzen Sternkarten, bearbeitet, ist der vollständigste und verbessertste unter seinen Vorgängern. Er enthält 10570 Sterne.

2. Planeten waren den Alten Irr- oder Wandelsterne, weil sie immer ihre Lage untereinander und gegen die Fixsterne änderten, und folglich unregelmäßig am Himmel umher zu irren schienen. Die Alten kannten nebst den eigenen Bewegungen der Sonne ☉ und des Mondes ☽ noch die des Merkurs ☿, der Venus ♀, des Mars ♂, Jupiters ♃ und Saturns ♄. Neuere Astronomen entdeckten noch folgende Planeten: Herschel (1781) den Uranus ♅; Piazzi, Professor und Direktor der Sternwarte zu Palermo, (1801) die Ceres ⚳; Doctor Olbers (1802) die Pallas ⚴; Professor Harding (1805) die Juno ⚵; derselbe Dr. Olbers (1807) die Vesta ⚶.

Man unterscheidet ferner zwischen Haupt- und Nebenplaneten, oder Trabanten (Satellites). Die Sonne, oder an ihrer Stelle die Erde ♁, macht mit den genannten Planeten, den Mond, als Trabanten der Erde, ausgenommen die Hauptplaneten aus. Jupiterstrabanten entdeckte man vier; man nannte sie auch die Galileischen Sterne, von ihrem Entdecker Galilei, obgleich Simon Marius kurz nach der Erfindung der Fernröhre (1609) sie zuerst entdeckt hatte. Huygen entdeckte 1655 einen Saturnstrabanten; Cassini nachher noch vier kleinere, und 1789 entdeckte Herschel mit seinem 40füßigen Teleskop den sechsten und siebenten. Eben derselbe hatte schon 1787 zwey Trabanten des Uranus entdeckt. Er entdeckte nachher noch vier, so, daß wir bis itzt 11 Hauptplaneten und 18 Satelliten kennen.

Wenn

Wenn man die 12 Sternbilder des Thierkreises, und in diesen die 4 Sterne erster Größe, nämlich Aldebaran (im Stier), Regulus (im Löwen), die Kornähre der Jungfrau und Antares oder Skorpionsherz kennt, welcher Sterne Glanz dem der Planeten gleicht; so kann man leicht die alten Planeten am Himmel unterscheiden, indem sie sich im Thierkreise oder in dessen Nachbarschaft immer aufhalten, und ihr Licht nicht so, wie das der Fixsterne, funkelnd oder zitternd, sondern, wie des Mondes Licht, sanft und stille ist. Merkur hat überdieß ein weißliches; Venus ein prächtighellglänzendes; Mars ein rothes; Jupiter ein gelbliches; Saturn ein blaßrothes; Uranus ein hellweißes Licht. Juno hat, durch Teleskope betrachtet, ein mattes schneeweißes; Ceres ein bläulich-weißes, Pallas ein gelblichweißes Licht.

„Warum, so fragten selbst Unterrichtete, sagt Piazzi's Biograph (in v. Zach's monatl. Corresp. Jan. 1810), — warum legt man auf die Auffindung dieses atomenartigen Gestirns (der Ceres), das nur dem bewaffneten Auge des Astronomen sichtbar ist, einen so hohen Werth?" Erkenntniß unseres Sonnensystems! „giebt es eine höhere, eine schönere für den Menschen, „für das Wesen, das mit seinem Geiste das Unendliche „umfaßt? wer darinn einen Schritt vorwärts thut, er„wirbt der Gegenwart der Zukunft Dank. Einen sol„chen that Piazzi. Analogien ließen einen neuen Planeten

„zwi-

„zwischen Mars und Jupiter vermuthen, und die Ver-
„muthung ward zur Wahrheit durch die Entdeckung. —
„Wohl möglich, daß auch ohne Piazzi's Entdeckung
„jene 3 neuen Bewohner des Sonnensystems aufgefun-
„den worden wären. Aber unläugbar war sie die
„nächste Veranlassung; Piazzi muß also, wollen wir
„gerecht seyn, als der Columbus dieser neuen planeta-
„rischen Welt gelten." —

3. Außer der Sonne und den Planeten wandern noch andere Himmelskörper mit bemerkbarer eigenen Bewegung unter den Fixsternen umher, erscheinen aber nur zuweilen, wie Gäste, eine kurze Zeit, und verschwinden auf lange Zeit wieder. Diese Sterne nannten die Alten Cometen, oder Haarsterne, weil sie an ihnen einen langen Schweif, wie fliegendes Haar, bemerkten. Allein es ist dieß kein nothwendiges Merkmal eines Cometen; der 1585 von Tycho beobachtete war völlig rund; eben so war der von Hevelius 1665 bemerkte Comet fast ohne Schweif, und nach Cassini's Zeugniße war der Comet von 1682 so rund und leuchtend, wie Jupiter. Indessen ist das Licht der Cometen meistens blaß und trübe; sie erscheinen, wie in Nebel gehüllte Sterne. Der innere Theil, der Kern, ist dicht und undurchsichtig; der Nebel locker und durchsichtig. Der Schweif des Cometen ist an dessen Kopfe am schmalsten; wird dann immer breiter, dabey aber so dünn, daß man die Sterne durch ihn sehen kann. Der Comet von

1744

1744 ist besonders wegen der Schönheit seines Schweifes, der die Gestalt eines Fächers hatte, berühmt.

Uebrigens zählt man bis itzt nur 84—86 Kometen, von welchen so viel bekannt ist, als zur Berechnung ihrer Bahnen nöthig ist.

Eintheilung der Astronomie.

§. 2. Die Astronomie wird in die theoretische und praktische eingetheilt. Jene enthält die Theorie von den Weltkörpern, theils, wie sie uns erscheinen, theils, wie sie wirklich beschaffen sind, und giebt die Regeln und Gesetze an die Hand, die Himmelskörper zu beobachten, ihre Lage und Weite gegen und voneinander, ihre Bewegung und Bahnen, ihre Größe, Schwere, Dichtigkeit und ihre regelmäßige Verbindung untereinander zu bestimmen. Die praktische Astronomie beschäftigt sich mit der wirklichen Beobachtung und Berechnung.

Die theoretische Astronomie theilt man wieder in die sphärische und theorische. Jene betrachtet blos die Weltkörper, wie sie uns erscheinen, diese erforscht aus ihren Erscheinungen, wie sie wirklich sind.

Die theorische Astronomie hat zwey Theile, einen mathematischen und physischen. Die mathematische Astronomie untersucht und bestimmt nur das an den Weltkörpern, was auf ihre Quantität oder ihre gegenseitige Verhältniße Bezug hat. Die physische Astronomie erforscht die Triebräder, welche das Universum in

Be-

Bewegung setzen und erhalten, nämlich die Kräfte der Weltkörper, die Gesetze, nach welchen sie wirken, und die daraus entspringende herrliche Regelmäßigkeit bey aller anscheinender Unordnung; die selbst in jener Regelmäßigkeit liegende Ursache dieser scheinbaren Unordnung; ferner die Schwere, Dichtigkeit der Weltkörper, die Verbindung unzähliger Himmelskörper zu einzelnen Sternsystemen, und endlich die Verbindung aller dieser zu einem einzigen Weltgebäude, oder zum Universum.

Daß die theorische Astronomie, der vollbürtigste Zeuge der Größe des Menschengeistes, viel jünger seyn müsse, als die sphärische, erhellt von selbst. Mehrere tausend Jahre mußten vom ersten Staunen an dahin gehen, bis man den blosen Schein von der Erscheinung geschieden, in die Menge der himmlischen Erscheinungen gewisse Systeme gebracht, und sich durch allerley Kunstgriffe über diese Erscheinungen am Himmelsgewölbe orientirt hatte. Von da aber, von der Erscheinung bis zu ihrer Erklärung — welch' ein Schritt! Erst dem großen Newton (geb. 1642, † 1727) war es vorbehalten, durch sein unsterbliches Werk „Philosophiae naturalis principia mathematica“ den Grund zu dem großen und herrlichen Gebäude der physischen Astronomie zu legen.

Aus der Optik ist bekannt, warum uns, wenn wir auf einem erhabenen, freyen Platze stehen, das Himmelsgewölbe, welches uns eigentlich als eine vollkommne Halbkugel erscheinen müßte, muschelförmig erscheint,

so,

so, daß die Sterne und überhaupt alle Punkte, welche gerade über uns am Himmel stehen, uns näher zu liegen scheinen, als diejenigen, welche nicht weit vom Horizonte abstehen. Um sich ferner zu überzeugen, daß es bloser Schein ist, daß der Himmel, von einem erhabenen Orte aus betrachtet, auf der Erde ringsum, in der Peripherie eines, unsere Aussicht begrenzenden, Kreises, den man daher Horizont (circulum finitorem, von ὁρίζω, finio,) nennt, aufliege, darf man nur erwägen, daß die Sonne und andere Gestirne, welche man am westlichen Horizonte untergehen gesehen hat, am östlichen Horizonte wieder zum Vorschein kommen. Hieraus schließen wir, daß der Himmel unsere Erde ringsum umgebe, folglich die Gestalt einer hohlen Kugel oder Sphäre habe, in deren Mittelpunkte sich der Zuschauer oder Beobachter befindet; daß ferner diese Kugel vom Horizonte in zwey Hemisphärien, die sichtbare und unsichtbare Hälfte (in hemisphaerium superius et inferius), worauf sich jenes Auf- und Untergehen der Gestirne bezieht, getheilt werde. Die Endpunkte eines auf den Mittelpunkt des Horizontes gezogenen, und auf beyden Seiten bis an die Oberfläche der hohlen Himmelskugel verlängerten Lothes sind die Pole des Horizontes, der Scheitelpunkt und Fußpunkt (Zenith und Nadir).

Hieraus leuchtet ein, daß die sphärische Astronomie der erste und älteste Theil der Astronomie sey, und daß die sphärische Trigonometrie, zum Behufe jener erfun-

funden, die vorzüglichsten Mittel enthalten werde, uns in Ansehung des Himmels, oder der mannigfaltigen himmlischen Erscheinungen zu orientiren.

Hauptaufgabe der sphärischen Astronomie, und allgemeine Methode, jene zu lösen.

§. 3. Die Hauptaufgabe der sphärischen Astronomie besteht dem Gesagten zufolge darin: an der scheinbaren hohlen Himmelskugel Oberfläche, wohin wir alle Sterne, und überhaupt alle himmlischen Erscheinungen referiren, für diese oder überhaupt für jeden Himmelspunkt den Ort so zu bestimmen, daß er von allen übrigen Punkten unterschieden, und folglich von jedem Andern vermöge jener Bestimmung wieder aufgefunden werden kann.

Um diese Aufgabe zu lösen, bezieht der Astronom die Himmelskörper vorzüglich auf drey größte Kugelkreise, den Horizont, Aequator und auf die Ecliptik, Kreise, welche durch die Beobachtung der Himmelskörper und ihrer scheinbaren Bewegung, auf eine ganz natürliche Art gegeben werden. So führt uns der unmittelbare Anblick des Himmelsgewölbes auf den Horizont; die scheinbare tägliche Umdrehung der Himmelskugel mit allen Sternen um die Erde auf den Aequator, und die scheinbare jährliche Bewegung der Sonne auf die Ecliptik.

Fig. 1.

Beobachtet man nämlich die Sterne in hellen Nächten; so bemerkt man bald, daß einige an der hohlen Himmelskugel größte Kreise, wie AQ, einige kleinere, wie FN, in 24 Stunden beschreiben, und zwar um so kleinere Kreise beschreiben, je näher die Sterne an einem gewissen Punkte P der Kugel stehen, in welchem Punkte sich jene Kreise gleichsam verlieren. Diesen für uns sichtbaren Punkt P nennt der Astronom einen Weltpol (polus mundi, von πολέω, verto), und zwar den Nordpol (polus arcticus, von ἄρκτος, ursa, weil ein glänzender Stern am Schwanze des kleinen Bären eine kaum merkbare Bewegung hat, und daher sehr nahe an jenem Pole steht).

Kennt der Beobachter diesen für ihn erhabenen Weltpol; so kennt er auch die 4 Hauptpunkte des Horizontes, Nord, Süd, Ost, West, oder die vier Hauptweltgegenden (cardines mundi). Nämlich die Gegend, welcher wir uns in unseren nördlichen Ländern zukehren, indem wir den Nordpol betrachten, nennen wir Nord (Septentrio); jene, gegen welche wir die Sonne gegen des Tages Mitte stehen sehen, Mittag (meridies); die Gegenden, gegen welche zu wir die Sonne auf und untergehen sehen, nennen wir Ost und West (ortus et occasus); diese Punkte liegen zwischen Nord und Süd im gleichen Abstande, oder unter rechten Winkeln.

Stellt man sich durch den Nordpol P und der Kugel Mittelpunkt an die entgegengesetzte Fläche dieser Himmelskugel eine gerade Linie Pp gezogen vor; so ist der dem Punkte P entsprechende Endpunkt p dieser Linie der andere für uns unsichtbare Weltpol, Südpol (polus antarcticus); die diese Pole verbindende gerade Linie Pp heißt die Weltaxe (axis mundi). Jene von den Sternen beschriebenen Kreise heißen Parallelkreise, der größte aus ihnen, welcher von beyden Weltpolen gleichweit absteht, wird der Aequator oder Gleicher genannt, weil, wenn die Sonne in ihrer jährlichen Bewegung diesen Kreis zu beschreiben scheint, Tag und Nacht auf der Erde gleich ist. Alle kleinere Kreise, wie die 2 Wendekreise EB, CD, und die Polarkreise FN, fn heißen auch Tagkreise (circuli diurni). Die Pole des Aequators sind also die Weltpole selbst, und der Aequator, als größter Kreis, theilt die Himmelskugel in die nördliche und südliche Halbkugel (in hemisphaerium boreale et australe).

Beobachtet man die Sonne genau; so bemerkt man, daß sie, während sie sich mit den übrigen Sternen täglich von Osten nach Westen bewegt, auch eine Bewegung von Westen nach Osten zu haben scheine, indem sie jeden Tag bey andern beynahe um einen Grad östlicher stehenden Sternen erscheint. So lehrt uns eine fortgesetzte Beobachtung der Sonne jährliche Bewegung, und die von ihr in einem Jahre durchlauffene Bahn kennen, welche man Ecliptik (von ἐκλειπω, deficio,) nannte, weil

weil der Mond immer beynahe in der Ecliptik ist, wenn eine Monds- oder Sonnenfinsterniß (ecclipsis) vorfällt.

Durch fortgesetzte Beobachtungen wurden ferner schon die ältesten Astronomen belehrt, daß sich die Sonne von dem Aequator, nachdem sie diesen als Tagskreis beschrieben hatte, gegen Norden, oder gegen Mittag immer mehr, aber auf beyden Seiten des Aequators damals nie weiter, als 24°, von diesem entferne; daß folglich die Sonnenbahn den Aequator in 2 entgegengesetzten Punkten durchschneide, also ein größter Kreis sey. Nehmen wir nun an, daß diese Astronomen die Aequatorhöhe ihres Ortes, d. i. den Abstand des Aequators vom Horizonte ihres Ortes, kannten; so vermochten sie auch einen Aequinoktialpunkt, und hiedurch auch den andern zu bestimmen. Sie durften nur z. B. gegen des Winters Ende die kleinste Höhe der Sonne am Mittage bemerken. War diese der Aequatorhöhe des Beobachtungsortes gleich; so hatten sie den Tag der Nachtgleiche, oder den Frühlingsäquinoktialpunkt (punctum aequinoctiale vernum). Beobachteten sie, welcher Himmelspunkt, oder welcher Stern 12 Stunden später oder zu Mitternacht dieselbe Höhe der Sonne oder des Aequators habe; so wußten sie hiedurch den der Sonne entgegengesetzten Punkt, oder den Herbstäquinoktialpunkt (p. aequinoctiale autumnale); — und umgekehrt —.

So also war es den ältesten Astronomen möglich, am gestirnten Himmel diese zwey Hauptpunkte, und hiedurch

auch

auch die Lage desjenigen größten Kreises, welcher durch diese Punkte und die Weltpole geht, zu bestimmen. Diesen größten Kreis nannten sie Kolur der Nachtgleichen (colurus aequinoctiorum).

Wenn sie endlich diejenigen Tage bemerkten, an welchen die Sonne sich weder merklich vom Aequator weiter entfernte, noch sich ihm merklich näherte, was gegen den 21t. Junius und 21 December geschah; so kannten sie nebst den Wendekreisen des Krebses (EB) und des Steinbocks (CD) auch die 2 zwischen den Aequinoktialpunkten liegenden Punkte, wo die Sonne gleichsam stille zu stehen scheint, welche Punkte sie die Solstitialpunkte (punctum solstitiale aestivum et brumale) nannten. Dadurch war zugleich die Lage des Kolurs der Sonnenstillstände (colurus solstitiorum) bestimmt.

Gleichwie man nun durch unmittelbare Beobachtung die Sonnenbahn kennen lernen kann; so kann man auch den Himmelsäquator leicht kennen lernen. Weil nämlich dieser den Horizont genau im Ost und Westpunkte halbirt, indem sie größte Kreise sind; so darf man nur an dem geraden, genau nach Ost und West gerichteten Rande einer horizontalen Ebene ein um diesen Rand bewegliches Bret, und an diesem ein Fernrohr oder Diopterlinial befestigen. Sieht man nun genau im Ostpunkte einen Stern aufgehen, und verfolgt diesen mit dem Fernrohre bis zu seinem Untergange; so liegt jenes in dieser Lage befestigte Bret in der Aequatorfläche, indem der

Stern

Stern den Aequator als Tagskreis beschreibt. Visirt man nun nach mehreren Sternen; so sind diese alle in der Aequatorfläche, oder in deren Nähe. Kennt man also diese Sterne —, so kennt man auch den Aequator.

Auf diese Art sehen wir deutlich ein, wie es schon den ältesten Astronomen möglich wurde, sowohl die größten als kleineren Kreise auf einer kleinen Ringkugel (Sphaera armillaris) richtig zu verzeichnen. Zogen sie in einem Abstande von 24° oder $23\frac{1}{2}$° von den beyden Weltpolen 2 Parallelkreise; so hatten sie auch die Polarkreise (circulus polaris arcticus FN, et antarcticus nf). Zogen sie eben so in einem Abstande von 10° über und unter dem Aequator zwey Parallelkreise; so hatten sie die Zone von 20° Breite, welche sie den Thierkreis nannten. Wenn sie auch die Erhebung des sichtbaren Pols über ihren Horizont kannten; so fehlte ihnen nun nichts mehr, um die Himmelskugel und ihre Stellung im Kleinen richtig nachzubilden.

In Betreff der Stellung der Ringkugel ist noch zu bemerken, daß man in Ansehung der verschiedenen Lage der Länder der Erde drey verschiedene Hauptstellungen der Ringkugel unterscheidet; je nachdem nämlich der Aequator den Horizont entweder unter rechten, oder schiefen Winkeln durchschneidet, oder mit ihm parallel ist, nennt man die Kugel gerade (Sphaera recta), oder schief, oder parallel.

Bey der geraden Kugel liegen die Weltpole im Horizonte; alle Sterne, senkrecht über den Horizont heraufsteigend, kommen in 24 St. über denselben. Die Bewohner des Erdäquators haben vom 20ten März bis zum 22ten September die Sonne nördlich, und werffen ihren Schatten während dieses halben Jahres beständig gegen Süden; in der andern Hälfte des Jahres steht ihnen die Sonne südlich, und ihr Schatten fällt beständig nördlich; sie heißen daher Zweyschattige (ascii amphiscii). Beschreibt aber die Sonne den Aequator als Tagskreis; so sind sie (zweymal des Jahrs) Unschattige (ascii).

Bey der parallelen Kugel fällt der Aequator mit dem Horizont zusammen, und die Weltpole P, p werden die Pole des letztern. Die Hälfte der Sterne geht für die Polbewohner nie auf, die andere Hälfte nie unter, bey unveränderlicher Höhe. Daher haben sie ein halbes Jahr Tag, und ein halbes Jahr beständig Nacht, und da die Sonne mit den Sternen in Tagskreisen, welche mit dem Horizonte parallel sind, um diese Bewohner umherläuft; so beschreibt der Schatten derselben einen Kreis; sie sind Umschattige (periscii, von περι und σκία, umbra).

Außer denen, die unter dem Erdäquator und den Polen wohnen, ist für alle andere Erdbewohner die Stellung der Ringkugel mehr oder weniger schief; alle Gestirne gehen für sie schief auf und unter, und sie bleiben um so länger über, als unter dem Horizonte, je mehr sie

sich

sich dem erhabenen Pole nähern. Dasselbe gilt für die Sonne; daher die Ungleichheit der Tage und Nächte für unsere nördlichen Gegenden.

Nachdem nun die drey Hauptkreise, der Horizont, der Aequator und die Ecliptik an der scheinbaren hohlen Himmelskugel bestimmt sind; so kömmt es in der sphärischen Astronomie, welche die Lage der Sterne und überhaupt jedes Himmelspunktes gegen jeden dieser Kreise zu untersuchen und zu bestimmen hat, immer auf die Beantwortung dieser zwey Fragen an: Wie weit steht der fragliche Punkt vom Hauptkreise ab? und, diesen in 360° getheilt, durch den wievielsten Grad desselben Hauptkreises geht der jenen Abstand messende Bogen? Hiedurch hat man die Haupt- und Nebentheile der sphärischen Astronomie.

Der sphärischen Astronomie

Erster Abschnitt.

Von der Lage der Sterne gegen den Horizont.

Die Höhe und das Azimuth der Sterne zu finden.

Fig. 2.

§. 4. Höhe eines Sterns L heißt dessen Abstand vom Horizonte, gemessen durch den Bogen LI eines größten Kreises, welcher durch die Pole Z, n des Horizontes und des Sternes Mittelpunkt geht. Diese Kreise heißen Vertikal- oder Scheitelkreise; sind auf den Horizont senkrecht; halbiren diesen, wie sie von ihm halbirt werden. Hieraus folgt, daß sich des Sternes Höhe und Abstand vom Zenith einander zu 90° ergänzen, so, daß man aus dem einen, auch das andere weiß. Die Stelle dieser Kreise vertritt ein in 90° getheilter schmaler Streifen aus Messing, welchen man im höchsten Punkte der künstlichen Himmelskugel befestigt.

Azimuth eines Sternes L heißt derjenige Grad des Horizontes, durch welchen jener Abstandsbogen LI geht.

geht. Man theilt nämlich den Horizont, indem man den Südpunkt S, wegen der leichten Bestimmung der wahren Mittagszeit an jedem Erdorte, zum Anfangspunkt nimmt, von S bis O, von S bis W; dann von N bis O und von N bis W in 90°. Je nachdem nun der Abstandsbogen eines Sternes auf einen solchen Quadranten trifft; erhält das Azimuth seine Benennung; so hat der Stern M ein südwestliches, L ein südöstliches ... Azimuth. Es wird also dieses jederzeit durch den Bogen des Horizontes bestimmt, welcher zwischen dem Abstandsbogen eines Gestirnes und dem Nord- oder Südpunkt liegt; kann also nie über 90° betragen. Für L ist SI, für M ist SF ... das Azimuth.

Für den aufgehenden Stern A ist der Bogen AO des Horizontes seine Morgenweite (amplitudo ortiva), und geht er in a unter; so ist aW seine Abendweite (ampl. occidua). Es ergänzen sich also das Azimuth und die Morgen- oder Abendweite zu 90°, erstere ist daher der letztern allzeit gleich, und aus dem gefundnen Azimuth kennt man auch des Sternes Amplitudo.

Der VertikalkreisSnNZ, in welchem der Sonne Mittelpunkt in dem Augenblicke steht, wo sie für einen Ort der Erde ihre größte Höhe erreicht hat, heißt des Ortes Mittagskreis. Dieser geht also durch die Pole des Horizontes, auf welchem er senkrecht steht; theilt die Himmelskugel in die östliche und westliche Halbkugel, und hat die Punkte Ost und West zu Pole. Von jedem Sterne, welcher in den Meridian

eines

eines Ortes kömmt, sagt man, er kulminire, und seine Höhe heißt dann des Sternes Mittagshöhe. SN ist die Mittagslinie. Wie man diese für einen gewissen Ort ziehen könne, habe ich S. 152 meines Lehrb. d. Geom. dargethan.

Denkt man sich mit dem Horizonte parallele Kreise, wie DE, gezogen, welche Kreise man Höhenkreise, Almukantharats, nennt; so haben alle Punkte eines solchen Kreises, oder alle in ihm befindlichen Sterne, gleiche Höhe, aber nicht gleiches Azimuth. Daher nur in Verbindung von beyden die Lage eines Sternes gegen den Horizont bestimmt wird.

Fig. 3.

Die alten Astronomen nun suchten eines Sternes A Höhe mit Hilfe eines getheilten, und auf einem Stative befestigten Halbkreises (des Astrolabiums) MPQ, an dessen Durchmessers Enden M, Q ein Paar Dioptern, im Mittelpunkte C aber eine Alhidatenregel CP angebracht war. Mittelst eines Bleylothes ward das Instrument vertikal aufgestellt, so, daß MQ horizontal lag; wo denn das nach A gerichtete Diopternlinial den Bogen PQ = AR abschnitt, d. i. die Höhe des Sterns angab.

Die neueren Astronomen bedienen sich hiezu des an einem Stative befestigten und genau getheilten astronomischen Quadranten, auf dessen einem Halbmesser BC ein Paar Dioptern, oder ein Fernrohr, und in

dessen

dessen Mittelpunkte C ein freyspielendes Bleyloth, oder ein kupfernes Linial CD, angebracht ist. Liegt nun CD genau am Quadranten an; so befindet er sich in der vertikalen Ebene des Sternes A, nach welchem man visirt, und der vordere vom Faden oder dem Liniale CD abgeschnittene Bogen GE giebt die gesuchte Höhe AR, indem ZCA = BCE, folglich auch ACR = ECG ist. Auch der in den neuesten Zeiten erfundene, besonders für Reisende so sehr bequeme und nützliche Spiegelsextant, mit einem künstlichen Horizonte, dient zu gleichem Zwecke.

Fig. 4.

Zur Messung der täglichen Sonnenhöhe bedienten sich die alten Astronomen vorzüglich der Gnomons, dergleichen man heutzutage noch zu Paris, Florenz, Rom und Bologna sieht. Wenn nämlich AB eine genau auf die horizontale Ebene AD vertikale Mauer vorstellt, durch deren Oeffnung F ein Sonnenstral SC fällt, und man mißt AF und die Weite AC des Strals von der Mauer; so hat man aus CA : FA = r : tang. FCA (T. §. 61.) die verlangte Sonnenhöhe.

Fig. 2.

Um das Azimuth z. B. des Sternes L zu finden, dürfte man nur zugleich, da man seine Höhe mißt, die Linie CI bemerken, in welcher die Fläche des Instruments die Horizontalfläche schneidet; der gemessene Winkel

kel ICS gäbe dann das hier südöstliche Azimuth SI. Quadranten, welche durch einen Horizontalbogen den Grad des Azimuths zugleich anzeigen, heißen Azimuthalquadranten.

Die Mittagshöhe eines Gestirns zu finden.

§. 5. Diese Aufgabe zu lösen, hat man auf Sternwarten entweder einen in der Meridianebene beweglichen Quadranten, Meridianquadranten, oder ein zwischen 2 eigenen, vom astronomischen Thurme unabhängigen, Pfeilern aufgestelltes Fernrohr, Passagenin strument; mit Hilfe dieser Instrumente und astronomischer Uhren kann man sowohl die Höhe aller culminirenden Sterne, als auch die jedem Fixstern zukommende Culminationszeit bemerken.

Da nebst der Amplitudo die Mittagshöhe der Fixsterne für denselben Ort beständig dieselbe bleibt, (nicht aber die der Planeten); so werden jene angestellten Beobachtungen von den Astronomen in eigenen Tafeln verzeichnet. Sollen diese genau seyn; so muß der Augenblick der Culmination genau bestimmt werden können. Hilfsmittel hiezu sind die korrespondirenden Sonnenhöhen, theils in wiefern man dadurch eine richtige Mittagslinie zu ziehen (S. S. 152.), theils unabhängig von dieser den wahren Mittag für einen Ort zu bestimmen vermag.

Mißt man nämlich vormittags verschiedene Sonnenhöhen, und stellt nachmittags den Quadranten wie-

der

der nach der Reihe in dieselben Höhen von der größten bis zur kleinsten auf, und bemerkt bey jeder Höhe, was die Uhr zeige; so weiß man die Zwischenzeit, welche zwischen je 2 entsprechenden Sonnenhöhen verflossen ist, und die Hälfte derselben zeigt an, was die Uhr am wahren Mittage gezeigt, ob sie diesen also richtig angegeben habe, oder nicht, um wieviel sie in diesem Falle zu spät oder zu frühe gehe. Hätte die Uhr bey einer vormittägigen Höhe z. B. von 20° gezeigt 8 U. 20′ 17″, und nachmittags, da die Sonne wieder 20° hoch stand, 3 U. 42′ 35″; so hätte die halbe Zwischenzeit 3 St. 26′ 9″ betragen; diese folglich zu 8 U. 20′ 17″ addirt, hätte die Uhr am wahren Mittage 11 U. 46′ 26″ gezeigt, sie wäre also um 13′ 34″ zu spät gegangen. Leichter erhält man dasselbe Resultat, wenn man die Stunden in einem fortzählt, also setzt 15 U. 42′ 35″, dazu addirt die vormittags bemerkte Zeit, und diese Summe halbirt.

Auf diese Art sucht man aus mehreren korrespondirenden Sonnenhöhen den wahren Mittag, und nimmt den Quotienten aus der Summe der Resultate durch ihre Anzahl dividirt, als die genaueste wahre Mittagszeit; durch dieses Verfahren werden die etwaigen Fehler der einzelnen Beobachtungen auf alle Beobachtungen vertheilt. Hat also die Uhr nur einen völlig regelmäßigen Gang; so weiß durch sie der Astronom auf längere Zeit den wahren Mittag.

Wenn ein Beobachter von seinem Orte weiter gegen Osten, oder Westen geht; so ändert er hiedurch beständig

sein

sein Zenith; folglich ändert sich für ihn immer der Meridian, und zwar um die ganze Größe, um welche er dem Ost- oder Westpunkte näher kömmt. Da man nun mittelst eines Spiegelsextanten nicht nur korrespondirende Sonnenhöhen nehmen, sondern auch die Culmination der Sonne geradezu beobachten kann; so ist der Beobachter, welcher einen Zeithalter oder Chronometer (garde de temps), statt einer gewöhnlichen Taschenuhr, bey sich trägt, im Stande, den Unterscheid der wahren Mittagszeit für mehrere Beobachtungsorte anzugeben, folglich zu bestimmen, welche Orte östlicher, oder welche westlicher sowohl in Beziehung aufeinander, als auf den Ort, wo der Beobachter ausgieng, liegen.

Die Pol- und Aequatorhöhe eines Orts zu finden.

Fig. 5.

§. 6. Die von andern Beobachtungen unabhängige Methode, das Problem zu lösen, ist folgende:

Man messe zu irgend einer Zeit die größte Höhe BH eines Sternes, und zur andern Zeit dessen kleinste Höhe DH im Meridian. Ist der Polarstern dieser beobachtete Stern; so sind, weil dieser in langen Winternächten zweymal im Meridian PQpZ sichtbar ist, nämlich abends über P in B, und 12 St. nachher unter P in D, die Beobachtungen in 12 Stunden geendigt. Nun ist der Stern vom Nordpol immer gleich entfernt, oder DP = BP; daher $BH - DH = BD$, und $\frac{1}{2} BD + DH =$ PH

PH oder = der gesuchten Polhöhe. Diese ist für Würzburg 49° 46′ 6″.

Aus der bekannten Polhöhe PH eines Ortes hat man auch die Aequatorhöhe AR. Denn HZR = HP + PA + AR = 180°, davon PA = 90° abgezogen, bleibt PH + AR = 90°; also Pol- und Aequatorhöhe wechselseitige Complemente.

Auch könnte man AR unmittelbar finden. Denn da der Aequator AQ den Horizont HR in B schneidet; so ist dieser Punkt der Pol des Meridians. Also sind BA und BR Quadranten, und AR das Maß des sphärischen Winkels ABR (T. §. 88), oder des Neigungswinkels der Ebene des Aequators zu der des Horizontes (T. §. 86.) Würde man daher die Neigung des nach der im §. 3. angegebenen Methode befestigten Brettes zu der horizontalen Ebene messen; so hätte man die Aequatorhöhe unmittelbar, aber weniger sicher gefunden.

Da ferner ZP + PH = 90° = AR + PH; so ist ZP = AR, d. i. der Abstand des Zeniths vom nächsten Weltpole gleicht der Aequatorhöhe; und weil ZA + ZP = 90° = PH + ZP, folglich ZA = PH; so ist der Abstand des Zeniths vom Aequator gleich der Polhöhe.

Den Abstand zweyer Sterne von einander zu finden.

§. 7. Die Lösung dieser Aufgabe ist vorzüglich dem Seefahrer wichtig. Denn wenn er den scheinbaren Ab-

stand des Mondes von einem bekannten Stern weiß; so kann er den Unterschied des wahren Mittags seines Schiffes und eines andern bekannten Ortes auf dem Continent, und hiedurch den Ort bestimmen, wo er sich auf dem Meere befindet.

Fig. 2.

Stehen nun die 2 Gestirne E und K in demselben Meridian, oder Vertikalkreise; so giebt der Unterschied ihrer gemeßnen Höhen SE — SK das gesuchte KE. Sind sie aber, wie M und E, in verschiedenen Vertikalkreisen; so messe man in demselben Augenblicke die Mittagshöhe des Gestirns E und die Höhe von M, nämlich MF und sein Azimuth SF. Im sphärischen Dreyecke ZME weiß man nun ZM (§. 4.), eben so ZE und durch SF das Maß des eingeschlossenen Winkels an Z, als dem Pole des Horizontes (T. §. 88.). Denkt man sich das Loth EP gefällt; so hat man nach S. 262. Trig. Fall 4. durch r: cos. Z = tang. ZE: tang. ZP, ZP, und ZM — ZP das Segment PM; folglich aus cos. ZP: cos. PM = cos. ZM: cos. ME die gesuchte Distanz.

Zweyter Abschnitt.

Von der Lage der Sterne gegen den Aequator.

Die Deklination und Rectascension eines Sternes zu finden.

§. 8. Wenn die Ortsbestimmung der Gestirne an der Himmelskugel, in so fern sie auf den Horizont bezogen werden, für den Astronomen von äußerster Wichtigkeit ist, ungeachtet jene Bestimmung gleichsam nur für ihn, nicht aber für andere Orte mit verschiedenem Horizonte, gültig ist; so muß die Fixirung der Lage der Sterne, auf den Aequator, als unveränderlichen Himmelskreis, bezogen, nicht minder wichtig seyn, indem sie allgemein interessant ist.

Wir haben oben schon gesagt, daß die Sonne den Aequator als Tagskreis zweymal im Jahre zu beschreiben scheine, und dann Tag und Nacht auf der Erde gleich mache. Es geschieht dieses 1) im Frühlinge gegen den 21ten März; der Aequinoktialpunkt ist 0°♈, indem die Sonne im Anfange dieses Zeichens ist, welches man, wie jedes der übrigen Zeichen, in 30° zu theilen pflegt; — 2) im Herbste gegen den 22. oder 23ten September, wo die Sonne in 0° des dem Widder gegenüberstehenden oder von diesem 180° entfernten Zeichens der Waage steht. Den erstern Punkt, oder 0°♈, wählten die Astronomen zum Anfangspunkt des Aequators; von ihm

an

an zählen sie die Aequators Grade von Westen nach Osten bis 360°.

Weil nun bey der täglichen scheinbaren Umdrehung der Himmelskugel alle Grade des Aequators durch den Meridian gehen, also in 1. St. 15°, in einer Zeitminute 15′ u. s. w.; so erhellt, daß man jeden Aequatorbogen in Zeit, und umgekehrt, verwandeln könne.

Fig. 5.

Die Abweichung oder Deklination eines Sterns S oder L ist der Abstand desselben vom Aequator, gemessen durch den Bogen SA oder LA eines größten, durch die Weltpole gehenden Kreises. Ein solcher Kreis heißt daher auch Deklinationskreis, und von ihm gilt alles, was vom Meridian gesagt wurde, welcher selbst auch zur Klasse der Deklinationskreise gehört. Die Deklination ist, wie SA nördlich +, oder, wie LA, südlich —. Diese, wie jene, ergänzt den Abstand des Sterns L oder S vom nächsten Weltpole p oder P zu 90°, wird also von 0° — 90° gerechnet.

Die gerade Aufsteigung oder Rectascension eines Sternes S oder L ist der Grad A des Aequators AQ, welcher mit dem Sterne zugleich kulminirt; oder, was dasselbe ist, jeder Bogen des Aequators von 0° ♈ gegen Osten gerechnet; also der Bogen, welcher von dem Augenblicke, wo der Frühlingspunkt im Meridian war, diesem Punkte bis zu dem Augenblicke, wo der Stern S

oder

oder L kulminirt, nachgestiegen ist. Die schiefe Auf- oder Niedersteigung, welche nur für diejenigen Länder statt findet, die nicht unter dem Aequator liegen, ist derjenige Punkt des Aequators, welcher mit einem Sterne zugleich auf- oder untergeht. Geht z. B. die Sonne in N unter; so steht der Aequatorpunkt B zugleich im Horizonte.

Weil nun SA = SR — AR, und LA = AR — LR; so ist klar, daß man die Abweichung jedesmal finde, wenn man entweder von der gemessenen Höhe des Sterns im Meridian, im Falle diese größer, als die Aequatorhöhe gefunden wird, die letztere abzieht, (woraus man erkennt, ob die Abweichung nördlich ist); oder umgekehrt, wo sich dann der Stern auf der südlichen Halbkugel befindet.

Weiß man nun die Zeit, wo 0°♈ kulminirte, und hat man auch mittelst einer richtigen Uhr die Culminationszeit für S oder L bemerkt; so hat man auch die gerade Aufsteigung des Gestirns, indem man die Zwischenzeit in einen Aequatorbogen verwandelt.

Setzen wir nun, ein Astronom habe zur Zeit der Aequinoktien den Augenblick der Kulmination von 0°♈ bemerkt; dann in sternhellen Nächten die Zeiten, wo mehrere Sterne nacheinander kulminirten, folglich die relativen Unterschiede ihrer Rectascensionen in Zeit gefunden; so sehen wir ein, wie er, wenn er nur von einem einzigen jener Sterne die absolute Rectascension weiß, die der andern Sterne finden könne. Auf diese

Art

Art vermochten die Astronomen, Tafeln über die Deklination und Rectascension sowohl der Sonne für jeden Tag des Jahres, als sehr vieler Fixsterne ebenfalls für jeden Tag des Jahres (indem der Fixstern nach 24 Stunden immer wieder kulminirt,) zu verfertigen. Diese Tafeln gewähren besonders dem Seefahrer den großen Vortheil, daß er durch sie die Aequatorhöhe, und eben dadurch die Polhöhe des Ortes bestimmen kann, wo er sich befindet. Denn mißt er z. B. der Sonne Höhe SR, oder wenn sie südlich steht, LR, und zieht von SR die bekannte Deklination ab, oder addirt zu LR die südliche Deklination AL; so findet er die Aequatorhöhe.

Der Stundenwinkel und dessen Gebrauch.

Fig. 6.

§. 9. Der Winkel SPZ, gebildet an einem Weltpole P von einem Deklinationskreise PS des Sterns S (welchen Kreis man auch Stundenkreis nennt) und dem Meridian PZAQ, heißt der Stundenwinkel für S; sein Maß ist der zwischen seinen verlängerten Schenkeln enthaltene Aequatorbogen TA, welcher darum auch Zeitbogen, oder Abstandsbogen vom Meridian für den Stern S heißt.

Fig. 7.

Für den in S aufgehenden Stern ist TA = SPM der Zeitbogen, SM der halbe Tagbogen. Da nun T mit dem Sterne zugleich in den Meridian kömmt,

oder

oder in diesem gestanden war; so zeigt uns der Zeitbogen, wie viele Grade des Aequators noch durch den Meridian gehen müssen, bis der Stern kulminirt; oder wie viele Grade seit dessen Kulmination durchgegangen sind. Durch Verwandlung dieser Grade in Zeit weiß man des Sternes Kulminationszeit in Stunden. . .

Fig. 6.

Gesetzt nun, man wisse die nördliche Polhöhe HP $= \varepsilon$; so weiß man auch ihr Complement PZ; eben so SP aus der bekannten Deklination ST $= \delta$, und durch des Sternes Höhe SW $= \eta$ ist auch die Ergänzung SZ gegeben. Man kann also nun im sphärischen Dreyecke ZSP den Stundenwinkel SPZ aus der Formel

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{SPZ} = \sqrt{\left[\frac{r^2.\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\text{SZ}+\text{SP}-\text{PZ}).\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\text{PZ}+\text{SZ}-\text{SP})}{\text{Sin. PZ. Sin. SP}}\right]}$$

und, wenn man diese Grade in Zeit verwandelt, finden, wann der Stern kulminirte, oder kulminiren werde. Hieraus läßt sich auch die Zeit der Beobachtung bestimmen, wenn man z. B. aus schon berechneten Tafeln die Kulminationszeit des Sternes S weiß. Ich habe dieses, wie obige Formel, T. S. 296. 97 durch ein Beyspiel erläutert.

Fig. 7.

Den halben Tagbogen des Sternes kann man aus tang. SP: tang. PH $=$ r: cos. HPS (T. §. 108.) — finden. Denn ist die Deklination nördlich; so bestimmt

der Nebenwinkel SPM den halben Tagbogen SM; ist sie aber südlich, so hat man diesen durch den aufgefundenen Winkel selbst.

Verwandelt man diesen gefundenen halben Tagbogen in Zeit: so hat man des Sternes halben Aufenthalt über dem Horizonte, u. s. w., und wenn man diesen von des Sternes bekannter Kulminationszeit abzieht, oder dazu addirt; so weiß man die Zeit seines Aufganges oder Unterganges.

Fig. 8.

Eine andere Methode, den Zeit- oder Abstandsbogen, oder die Stunde der Kulmination eines Gestirns zu finden, ist diese: Es stelle MCD den Meridian, M die Mitte des Himmels, QMD den Aequator, ♈ den Frühlingspunkt vor; so ist ♈M für den Stern M im Meridian, ♈S für die Sonne die gerade Aufsteigung, und MS der Abstandsbogen der ☉ vom Meridian, oder der Zeitbogen (den wir vorhin durch TA bezeichneten), welcher zugleich der Unterschied zwischen ♈M und ♈S ist. Verwandelt man daher mittelst der Tafeln für die gerade Aufsteigung der Sterne jene Rectascensionen in Zeit (15° auf eine Stunde . . .); so giebt die Differenz den Abstandsbogen MS in Zeit. Ist z. B. die Rectascension eines Fixsterns M 15° größer, als die der ☉; so weiß man, daß diese 1 St. früher, als der Stern, dieser also um 1 Uhr kulminirt.

Fig.

Fig. 9.

Ist daher der Fixstern in E, und man sucht seinen Stundenwinkel, oder Abstandsbogen ME, jenes Winkels Maß, und man weiß der Sonne Stundenwinkel SM; so erhält man jenen durch die Regel: Der Stundenwinkel für die Sonne in Graden, weniger dem Unterschiede zwischen der Rectascension des Sterns E und der Rectascension der Sonne S, giebt den Stundenwinkel EM, von Osten nach Westen bis auf 24 St. gerechnet, d. i. $SM - (\curlyvee E - \curlyvee S) = EM$.

Die sehr leichte und nützliche Methode, mittelst der Beobachtung zweyer beliebigen Sterne, deren Abweichung bekannt ist, die Polhöhe eines Ortes zu finden, habe ich im §. 134. meiner Trig. erklärt.

Dritter Abschnitt.

Von der Lage der Sterne gegen die Ecliptik.

Schiefe der Ecliptik.

Fig. 10.

§. 10. Aus der Einleitung erinnert man sich, daß die Ebene des Aequators von der Ebene der von der Sonne in ungefähr 365 T. mit eigener scheinbarer Bewegung beschriebenen Bahn geschnitten werde. Diese

Neigung der Ecliptik zum Aequator heißt die scheinbare Schiefe der Ecliptik (obliquitas ecliptiсae); ihr Maß ist der sphärische Winkel EVA, oder der Bogen EA, welcher die größte Abweichung der Sonne ausdrückt. Diese Abweichung trifft im Sommersolstitium gegen den 21ten Junius, wo die Sonne den Krebswendekreis EB zu beschreiben scheint, ein. Würde man daher zu dieser Zeit die größte Mittagshöhe der Sonne beobachten, und die bekannte Aequatorhöhe von ihr abziehen; so hätte man EA, oder die Schiefe der Ecliptik. Oder man suchte gegen den 21ten December, wo das Wintersolstitium eintrifft, und die Sonne den Steinbockswendekreis CD zu beschreiben scheint, die größte südliche Deklination, indem man zur beobachteten kleinsten Mittagshöhe der Sonne die Aequatorhöhe addirte.

Würde man daher gegen den 21ten Jun. die größte, und gegen den 21ten Dec. die kleinste Mittagshöhe der Sonne bestimmen; so würde die halbe Differenz den Bogen AE, oder AD, d. i. die gesuchte Schiefe geben.

Die Schiefe der Ecliptik, welche man ungefähr durch $23°\frac{1}{2}$ auszudrücken pflegt, ist nicht nur in Ansehung ganzer Jahre und Jahrhunderte, sondern auch verschiedener Zeiten desselben Jahres veränderlich. So war sie nach Delambre's Berechnung am 1ten Jan. 1809 23° 27′ 44″,5; am 1t. Apr.... 44″,7; am 1t. Jul.... 43″,2; am 1ten Octob.... 43″,5, und am 1ten Jan. 1810... 42″,3. Eratosthenes, ungefähr 250 J. v. C. G. hat-

hatte sie 23° 50′; Albategnius gegen das J. 880 23° 35⅔; Tycho im J. 1587 23° 31′ 30″ gefunden; im J. 1780 war sie 23° 28′ 0″. Hieraus schließt man, daß sie ungefähr 36″ für 1 Jahrhundert variirt. Daher können auch die Länge und Breite der Gestirne keine vollkommen konstante Größen seyn, indem sie in Beziehung auf die Ecliptik erhalten werden.

Diese Abnahme der Schiefe der Ecliptik scheint übrigens ihre Grenze zu haben, von welcher an sie wieder eine Zunahme erhält. Würde die Ecliptik je mit dem Aequator zusammen fallen können; so würde für alle Orte der Erde Tag und Nacht beständig gleich seyn; für die Orte, welche gegenwärtig nicht unterm Aequator liegen, würde die Abwechslung der 4 Jahrszeiten verschwinden, und irgend eine permanente Jahreszeit eintreten.

Aus dieser Schiefe ist ferner klar, daß die Pole N,n der Ecliptik nicht die Weltpole seyen; jene liegen vielmehr im Colur der Sonnenstillstände EACP. Denn bey der größten Deklination EA der Sonne ist ihre Rectascension $\curlyvee A = 90° = \curlyvee E$; jener Colur steht also auf diese Kreise senkrecht auf, und geht durch ihre Pole (T. §§. 86. 89.) Da nun der Colur durch die Pole des Aequators geht; so liegen auch in ihm die Pole der Ecliptik. Weil ferner der kürzeste Abstand der 2 Pole des Aequators und der Ecliptik dem Bogen gleich ist, welcher den kleinsten zweyer Winkel mißt, welche von beyden Kreisen gebildet werden (T. §. 89.), diese

Nei-

Neigung aber 23° 27′ 42″,3 ist; so findet man N und n, wenn man EP über P, und Cp über p um diese Größe verlängert. Es stehen demnach die beyden Parallelkreise NF, nf, welche von den Polen der Ecliptik von Osten nach Westen in 24 St. beschrieben werden, oder diese Polarkreise (circulus polaris arcticus und antarcticus) vom Aequator um 66°½, und von den Weltpolen um 23°½ ab, wenn man nämlich die Schiefe der Ecliptik = 23°½ überhaupt setzt. Diese Kreise, wie die Punkte für die Pole der Ecliptik, ändern sich mit der Schiefe der letztern.

Die Länge und Breite der Sterne, und ihren Positionswinkel zu finden.

§. 11. Der Abstand eines Sternes F oder D von der Ecliptik, gemessen durch den Bogen FE oder DE eines größten durch den Mittelpunkt des Gestirns und die Pole der Ecliptik gehenden Kreises (Breitenkreises) heißt des Gestirnes Breite (latitudo Stellae), welche entweder nördlich oder südlich ist. Der Grad aber der Ecliptik, durch welchen jener Bogen des Breitenkreises durchgeht, heißt die Länge des Sterns; so ist sowohl für den auf der Nordseite der Ecliptik stehenden Stern F, als für D die Länge ♈E. Hiebey ist zu bemerken, daß man die Grade der Ecliptik, wie die des Aequators, von 0°♈ zu zählen anfange, und zwar jedesmal nur bis 30° desselben Zeichens, so, daß man z. B. 63° der Ecliptik durch 3° der Zwillinge, oder durch 2^{s} + 3° bezeichnet.

Gleich-

Gleichwie nun durch die Deklination und Rectascension die Lage eines Sternes gegen den Aequator bestimmt wird; so geschieht dieses in Beziehung auf die Ecliptik durch Auffinden der Länge und Breite eines Sterns. Kennt man aber jene erstere; so findet man auch diese auf folgende leichte Weise durch bloße Rechnung:

Fig. 11.

Für den Stern S ist der auf den Aequator senkrechte größte Kreisbogen SF die Abweichung; ♈F die gerade Aufsteigung; SB die Breite, und ♈B die Länge. Zieht man durch S und ♈ einen größten Kreisbogen; so hat man im rechtw. sphär. Dreyecke S F ♈ den Winkel S ♈ F durch die Proportion (T. §. 107.) Sin. ♈F : r = tang. SF : tang. S ♈ F; hievon, für den Fall wo S und B auf derselben Nord- oder Südseite des Aequators liegen, die Schiefe der Ecliptik B ♈ F abgezogen, hat man den Winkel S ♈ B. Liegen aber B und s auf entgegengesetzten Seiten; so müßte man jene Schiefe addiren, um s ♈ B zu haben. Nach dem Satze I. T. §. 111. findet man S ♈ aus

r : cos. ♈F = cos. SF : cos. S ♈.

Daher nun im rechtw. sphär. Dreyecke S ♈ B die Breite SB aus

r : Sin. S ♈ = Sin. S ♈ B : Sin. SB (T. §. 106. Zus.)

und die Länge ♈B aus

r : cos. S ♈ B = tang. S ♈ : tang. ♈B (T. §. 108.).

Wäre die Rectascension über 90°; so zöge man hievon 90° ab; addirte aber diese oder 3 Zeichen zur gefundenen Länge ♈B.

Zugleich vermag man den Positionswinkel, welcher am Mittelpunkte eines Sternes von dem durch ihn gehenden Breitenkreise und dem Deklinationskreise gebildet wird, zu finden. Und zwar

Fig. 12.

erstens in Ansehung der Sonne S stelle ♈S einen auf die Ecliptik ♈E senkrechten größten Kreisbogen, SA den auf den Aequator ♈Q senkrechten Abweichungskreis vor. Würde man nun im Augenblicke, wo die Sonne kulminirt, ihre Höhe, oder ihren Abstand SB vom Horizonte HR messen, und davon die Aequatorhöhe AB abziehen; so hätte man die Abweichung SA der Sonne, und eben so leicht ihre gerade Aufsteigung ♈A. Da nun nebst diesem Perpendikel im rechtw. sphär. Dreyecke SA♈ auch S♈A, oder die Schiefe der Ecliptik, gegeben ist; so kann man durch

r: cos. ♈A = Sin. S♈A: cos. AS♈ (T. §. 111. III.) den letzten Winkel finden, dessen Complement der verlangte Positionswinkel GSA ist.

Fig. 11.

Zweytens für den Stern S ist BSF oder PSN, wenn man sich den Abweichungskreis zum Weltpol, und den Breitenkreis zum Pole der Ecliptik verlängert denkt, der Positionswinkel. Hier ist nun der Winkel P das Complement der geraden Aufsteigung; der Winkel N die bis zu 90° vermehrte Länge; PS das Complement der

Ab-

Abweichung, oder die Summe der südlichen Abweichung und 90°, und NS das Complement der Breite des Sterns (T. §. 109.). Aus 3 dieser Stücke kann man nun PSN finden.

Allgemeine Formeln, wie sich Abweichung, gerade Aufsteigung, Breite, Länge und Schiefe der Ecliptik untereinander bestimmen, findet man im §. 132 meiner Trig. Ebenda §. 114. III. findet man 10 Gleichungen, wodurch man, wenn aus diesen Stücken: Länge der Sonne, Rectascension, Deklination der Sonne, Schiefe der Ecliptik und dem Winkel der Ecliptik mit der Mittagsfläche — 2 Stücke gegeben sind, immer ein drittes durch Rechnung bestimmen kann. (Ich bemerke hiebey, daß in den dortigen Gleichungen immer ☉ statt ☌ und ☾ zu lesen ist, und in der zugehörigen Figur φ an der Stelle von ☉ stehen muß).

Durch die Bestimmung der Lage der Fixsterne gegen den Aequator und die Ecliptik wurde es den Astronomen möglich, genaue Sternverzeichnisse, von denen wir im 1t. §. schon sprachen, zu entwerfen. Das älteste uns durch den Almagest des Ptolomäus überlieferte Sternverzeichniß ist von Hipparch. Es enthält 48 Sternbilder mit 1022 Sternen; das Hevel'sche vom J. 1690 hat 1870, das berühmteste Flamstead'sche v. J. 1712 2919 Sterne. Unter den neueren zeichnen sich vorzüglich die Sternverzeichnisse von Bode, Lalande, Cagnioli, Piazzi, und in Ansehung südli-

cher

cher Sterne die Verzeichnisse von Mayer, Bradlei, Zach und Delambre aus.

Das Vorrücken der Nachtgleichen.

§. 12. Aus jenen Sternverzeichnißen, miteinander verglichen, ergiebt sich, daß die Länge der Fixsterne, bey beynahe ganz ungeänderter Breite, seit 2200 Jahren fast um ein ganzes Zeichen gewachsen, der Frühlingspunkt also von Osten nach Westen, oder wider die Ordnung der Zeichen, zurückegegangen ist, so, daß $0°\Upsilon$, welcher sonst in der Constellation Widder stand, nun westlicher im Sternbilde der Fische zu suchen ist. Die Astronomen mußten daher zwischen wirklichen oder ungebildeten Zeichen (dodecatemoria) des Thierkreises, und den gebildeten (asterismi), d. i. denjenigen Sternbildern unterscheiden, von welchen jene ihren Namen haben. Sagt man nämlich, die Sonne oder ein Fixstern stehe im Stier; so ist dieser Ort nun nicht mehr im Sternbilde Stier, sondern im Sternbilde Widder zu suchen.

Sorgfältige Vergleichungen lehrten ferner, daß dieses Zurückegehen des Frühlingspunktes in der Ecliptik von Osten nach Westen jährlich $50''$ oder $50'',4$ betrage, also in 100 J. $1° 23' 30''$, so, daß sonach die Aequinoctialpunkte in 23773 Jahren, welcher Zeitraum das Platon'sche Jahr heißt, ihre Revolution vollenden.

Dieses Zurückegehen des Frühlingspunktes nennt man auch die Vorrückung oder die Voreilung der

Nacht=

Nachtgleichen (praeceſſio aequinoctiorum), weil bey dieſer Bewegung des Frühlingspunktes von Oſten nach Weſten dieſer Punkt der ſich in entgegengeſetzter Richtung bewegenden Sonne gleichſam entgegen geht, dieſe folglich jährlich etwas früher in den Aequator zurücke kömmt, weßwegen die Frühlingsnachtgleiche etwas früher einfällt.

Fig. 10.

Nächſte Folge hievon mußte eine Aenderung der Deklination und Rectaſcenſion der Fixſterne ſeyn. Denn ſtellt AϒQ den Aequator vor 2200 Jahren vor, und man denkt ſich durch X, bis wohin 0°ϒ zurückegegangen iſt, einen parallelen Kreis gelegt, ſo iſt dieſer nun der Aequator. Dieſer kann daher itzt durch Sterne gehen, die ſonſt eine kleine ſüdliche Deklination hatten. Daher denn uns die ſüdlichen Sternbilder höher liegen, als den Alten. Die nördliche Abweichung der Sterne hingegen mußte ſich vermehren. Aus dieſer Aenderung der Lage des Aequators gegen die Fixſterne folgt weiter, daß auch ſeine, oder die Weltpole immer unter andern Fixſternen erſcheinen, und jährlich einen Bogen von 50″, den ganzen Kreis aber von Oſten nach Weſten um die Pole der Ecliptik in dem platoniſchen Jahre durchlauffen.

Fig. 13.

Es ſtelle CE die Ecliptik, QA den Aequator und s einen Stern im Sternbilde des Widders ſenkrecht über den Frühlingspunkt ϒ vor; ſo bekömmt man offenbar

dasselbe Phänomen, ob sich der Stern s gegen g parallel CE um 30° fortbewegt, oder dieser stille steht, und der Punkt V sich in entgegengesetzter Richtung von Osten nach Westen um dieselbe Größe von o bis r bewegt. Allein auf die einfachste Art nimmt man das letztere an, und erklärt dieses in der Theorik.

Von jener Veränderung der Weltaxe, vermöge welcher diese immer durch andere Sterne trifft, muß man die Nutation der Weltaxe unterscheiden. Unter dieser versteht man diejenige Aenderung, vermöge welcher bey unverrückter Lage der Pole der Ecliptik, also bey konstanter Breite, der Aequator, daher auch die Weltpole sich der Ecliptik periodisch bald nähern, bald sich von ihr entfernen, folglich nicht genau in jenem um die Pole der Ecliptik zu beschreibenden Kreise bleiben. Die Verminderung nämlich der Schiefe der Ecliptik ist nicht ganz gleichförmig, sondern sie verändert sich periodisch binnen 18 Jahren bis 9″. Diese Nutation der Weltaxe verursacht eine neue Aenderung in der Deklination, Rectascension und Länge der Sterne.

Die Zeit zu messen.

§. 13. Zum natürlichsten Zeitmaße diente allen Völkern die jährliche sowohl, als tägliche Bewegung der Sonne. Die Zeit von einer Frühlingsnachtgleiche zur andern heißt das wahre Sonnenjahr, tropisches Jahr; so wie die Zeit von einer Kulmination der Sonne zur andern der wahre Sonnentag. Dieser

hat

hat 24 wahre Sonnenstunden; 1 St. 60 wahre Sonnenminuten u. s. w. Das tropische Jahr begreift genau 365 T. 5 St. 48′ 45″$\frac{1}{2}$. Bey gleicher Geschwindigkeit würde daher die Sonne täglich einen Bogen von 59′ 8″$\frac{1}{3}$ durchlaufen, so, daß man folglich durch blose Multiplikation mit der Zahl der seit der Nachtgleiche verflossenen Tage den Ort der Sonne in der Ecliptik finden könnte. Allein dieser so berechnete Ort, den man auch den mittleren Ort, oder die mittlere Länge der Sonne nennt, stimmt mit dem wahren Sonnenorte nicht überein. Denn die Beobachtung lehrt, daß sich die Sonne im Winter durch einen Bogen von 61′, im Sommer aber nur durch einen Bogen von 57′ bewegt, daher in der nördlichen Hemisphäre beynahe 8 Tage länger, als in der südlichen verweilt.

Würde man auf gleiche Weise die Rectascension der Sonne berechnen, indem man annähme, die Sonne bewege sich im Aequator, um sich gleichförmig schnell zu bewegen; so würde diese so berechnete mittlere Rectascension der mittleren Sonnenlänge gleich seyn.

Die Sonnentage sind außer dem vorhin angeführten Grunde auch darum von ungleicher Länge oder Dauer, weil die Sonne in der Ecliptik, d. i. in einer gegen den Aequator (von welchem einzig in gleichen Zeitmomenten gleiche Theile durch den Meridian gehen,) geneigten Bahn fortrückt. Da nun die Richtung dieser Bahn im Mittagskreise nur selten gerade morgenwärts geht; so

schiebt

schiebt sich die Sonne nicht um die ganze Größe ihres Fortrückens in der Ecliptik, sondern nur um einen Theil derselben morgenwärts fort.

Fig. 14.

Wenn nämlich VQ einen Aequators Quadranten, und VE oder V♋ einen Quadranten der Ecliptik vorstellt; so wird die Sonne bey V, indem sie sich in einem Tage um den Bogen VB fortschiebt, nur um den Theil Vb gerade morgenwärts gebracht. Allein bey ♋ wird sie sich, indem sie den Bogen C♋ durchläuft, beynahe parallel mit VQ, folglich um das Stück rQ = C♋ gerade morgenwärts bewegen. Wären daher auch VB und C♋, und so alle täglich in der Ecliptik durchlauffenen Bogen einander gleich; so würden doch nicht darum Theile, wie ♈B, rQ, oder die Sonnentage einander gleich seyn. In diesem Sinne sind also die Tage um die Wintersonnenwende am längsten, oder im Winter länger, als im Sommer und um die Nachtgleichen. Weiter folgt, daß unsere Uhren, welche einen gleichförmigen Gang haben müssen, mit diesen so veränderlichen wahren Sonnentägen und Stunden nicht übereinstimmen können.

Um nun aus dem Sonnenlaufe denn doch ein gleichförmiges Zeitmaß zu erhalten, woran man die immer gleichen Stunden der gewöhnlichen Uhren halten könnte, hat man aus den ungleichen Längen der wahren Sonnentage eine mittlere Größe im Durchschnitte genommen, und diese den mittleren Sonnentag genannt, welcher

cher dann, wie oben, in mittlere Stunden ... getheilt wird. Zu diesem Behufe, wie zur Erhaltung der mittleren Länge und mittleren Rectascension der Sonne, stellt man sich gleichsam eine erdichtete Sonne im Aequator bewegt vor, welche diesen in demselben tropischen Jahre, wie die Sonne ihre wahre Bahn, folglich täglich einen Aequatorbogen von $59' 8''\frac{1}{3}$ mit gleichförmiger Bewegung durchlauft.

Die Sternzeit.

§. 14. Die Zeit der Rückkehr der Sonne zu demselben Fixstern, so, daß sie mit diesem wieder einerley Länge hat, wird Sternjahr genannt. Dieses ist länger, als das Sonnenjahr, weil mittlerweile, ehe die Sonne wieder zum Frühlingspunkt zurückekömmt, die Länge der Fixsterne wegen des Zurückegehens des Aequinoctialpunktes um $50'',4$ gewachsen ist; die Sonne muß daher, um wieder mit dem Stern zusammen zu kommen, noch diesen Bogen durchlaufen, wozu sie $20'$ $25'',5$ Zeit braucht. Das Sternjahr beträgt daher 365 T. 6 St. $9'$ $11''$.

Den immer gleichen und von Natur unveränderlichen Zeitraum, in welchem ein Fixstern wieder auf derselben Stelle im Meridian erscheint, oder die Himmelskugel sich einmal umdreht, heißt Sterntag = 24 Sternstunden. . . Die so nach der Fixsternbewegung eingetheilte Zeit nennt man überhaupt Sternzeit, Zeit der ersten Bewegung (tempus primi mobilis); daher Sternuhren.

Da sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit alle 360° des Aequators binnen 24 St. durch den Meridian schieben; so kommen auf eine Sternstunde genau 15° .... und umgekehrt, jeder Bogen von 1° braucht zum Durchgang durch den Meridian 4′ Sternzeit; der Bogen von 1′ 4 Sternsekunden. . .

Nun dreht sich genau in 24 Sternstunden die scheinbare Himmelskugel einmal um ihre Axe von Osten nach Westen; die erdichtete Sonne aber schiebt sich in derselben Zeit im Aequator um einen Bogen von 59′ 8″⅓ von Westen nach Osten fort. Wenn also der Fixstern schon wieder kulminirt, so muß sich erst jener Bogen noch durch den Meridian schieben, wozu er 3′ 56″ 33‴ Sternzeit braucht. Mithin ist der mittlere Sonnentag = 24 St. 3′ 56″ 33‴ = 86636″, 3 Sternzeit.

Bezeichnet man die Sekunden Sternzeit mit s und die der mittleren Sonnenzeit mit S; so hat man 1 Sterntag = 86400 s, und 1 mittl. Sonnentag = 86400 S; folglich, da 86400 S = 86636, 3 s, $\frac{86400 . 86400}{86636,3}$ = 86164 S = 86400 s = 1 Sterntag; oder dieser ist gleich 23 St. 56′ 4″ mittleren Sonnenzeit. Um so viel muß also eine Uhr zwischen 2 nächsten Durchgängen eines Fixsterns fortrücken, wenn sie mittlere Sonnenzeit zeigen soll. Das Verhältniß der mittleren Sonnenzeit zur Sternzeit hängt also von den 2 Gleichungen ab:

Sterntag = 86164″ mittl. Sonnenzeit
mittl. Sonnentag = 86636″, 3 Sternzeit.

Alle 360° des Aequators gehen also in 86164″ mittl. Sonnenzeit durch den Meridian, sohin 1° in 239″,3 (oder in 3′ 59″,3) und 1′ des Aequators in 3″ 59‴.... Ferner in 24 St. mittl. Sonnenzeit gehen durch den Meridian 360° 59′ 8″ des Aequators, also in 1 St. 15° 2′ 28″, in 1′ 15′ 2″ 28‴.... Auf diese Art vermag man die Bogen des Aequators auch in mittl. Sonnenzeit, und umgekehrt zu verwandeln, was durch eigene Tafeln erleichtert wird.

Die Sternuhr zeigt im Augenblicke der Kulmination des Aequinoctialpunktes o St. o′ ..., und beständig die gerade Aufsteigung des kulminirenden Punktes (d. i. des Punktes der Ecliptik, welcher durch den Meridian geht,) in Zeit verwandelt (15° auf 1 St.); daher zeigt die Sternuhr im Augenblicke der Kulmination der Sonne ihre gerade Aufsteigung in Zeit. Will man also finden, wieviel Uhr sie an irgend einem Tage zu Mittag zeigen werde; so darf man nur die gerade Aufsteigung der Sonne an jenem Tage in Zeit verwandeln. In der „Connoisance des tems“ findet sich über den Abstand des Aequinoctialpunktes von der Sonne eine Tabelle; nun ist dieser Abstand nichts, als die Ergänzung der geraden Aufsteigung der Sonne in Zeit zu 24 Stunden; folglich wenn z. B. dieser Abstand = 5 St. 10′ ist; so müßte an diesem Tage die Uhr mittags 18 St. 50′, oder 6 St. 50′ zeigen.

Die Zeitgleichung.

§. 15. Der für jeden Augenblick sich ergebende Unterschied zwischen der wahren oder scheinbaren und der mittleren Sonnenzeit heißt Zeitgleichung.

Wir haben schon im §. 13. die 2 Ursachen der ungleichen Dauer der wahren Sonnentage, oder der Rückkehr der Sonne zum Meridian angeführt, und gesagt, daß man eine mittlere oder erdichtete Sonne annehme, welche sich im Aequator täglich um einen Bogen von $59' 8''$ gegen Osten fortschiebt. Kömmt nun diese erdichtete Sonne, welche der wahren bald vor- bald nach eilen kann, in den Mittagskreis; so trifft der mittlere Mittag ein, den unsere gewöhnlichen Uhren zeigen. Kulminirt die wahre Sonne; so ist der wahre Mittag, den die Sonnenuhren angeben, und der Unterschied zwischen beyder Kulmination ist die Zeitgleichung. Da nun der mit einem Himmelskörper kulminirende Punkt des Aequators die gerade Aufsteigung ist; so ist die Zeitgleichung auch der Unterschied zwischen der mittleren geraden Aufsteigung, oder der ihr immer gleichen mittleren Länge (§. 13.) und der wahren geraden Aufsteigung der Sonne. Diese kann aus den oben angegebenen Ursachen von der erstern oft um 4° verschieden seyn, so daß die wahre Sonne der mittleren dann $\frac{1}{4}$ St. voreilen, oder auch nachkömmt. Am 1ten November jeden Jahres ist die Zeitgleichung sogar $16' 12''$.

Fig.

Fig. 14.

Allein jener Unterschied läßt sich in der Ausübung nur durch eine doppelte Operation nach zwey verschiedenen Prinzipien finden. Es sey (wie es im May statt findet) ♈h auf der Ecliptik, oder ♈f auf dem Aequator die mittlere Länge der Sonne; ♈S = ♈e ihre wahre Länge; ♈A ihre wahre gerade Aufsteigung. Es ist also Af = Ae — fe der ganze Unterschied zwischen der mittleren Länge und wahren Rectascension. Nun ist aber fe = hS der Unterschied zwischen der wahren und mittleren Länge, und Ae zwischen der wahren Länge ♈S = ♈e und der wahren geraden Aufsteigung ♈A, beyde in Zeit verwandelt; der erste Unterschied kann bis auf 7′ 42″, der andere bis auf 9′ 53″ gehen. Die Verbindung also dieser 2 Theile, welche sich wechselseitig vermehren oder vermindern, bildet die Zeitgleichung, welche 16′ 12″ nicht übersteigt, und gegen den 15t. April, 15ten Junius, 31ten August und 24ten December verschwindet.

Der theorischen Astronomie mathematischer Theil.

Erster Abschnitt.

Von der Sonne und dem Monde.

A. Von der Sonne.

Den Durchmesser der Sonne und den Planeten überhaupt zu bestimmen.

§. 16. Steht die Sonne im Aequator, und man bemerkt den Augenblick, wo der rechte Sonnenrand in den Meridian kömmt, und den Augenblick, wo der linke nachtritt; so giebt diese in einen Aequatorbogen verwandelte Zeit den scheinbaren Durchmesser der Sonne unmittelbar. Allein zu jeder andern Zeit, wo die Sonne mit dem Aequator parallele kleinere Kreise beschreibt, darf man nur den gefundnen Aequatorbogen durch den Cosinus der Deklination der Sonne multipliciren, um ihren scheinbaren Durchmesser zu haben.

Fig. 15.

Denn stellt P den Pol des Aequators vor, wovon AT ein Bogen ist, welcher mit dem Parallelbogen EC

des

des westlichen Sonnenrandes C zugleich durch den Meridian PA geht; so ist, weil CE ein kleiner, $\frac{1}{2}°$ nicht übersteigender Bogen ist, auch der Winkel P, oder dessen Maß AT sehr klein, so, daß man sie statt ihrer Sinusse setzen kann. Eben so ist auch CE wenig von dem größten Kreisbogen CG, den man auf PA senkrecht gefällt denkt, unterscheiden. Daher hat man

$$r : \begin{cases} \text{Sin. CP} \\ \text{cos. CT} \end{cases} = \begin{cases} \text{Sin. P} \\ \text{AT} \end{cases} : \begin{cases} \text{Sin. CG} \\ \text{CE} \end{cases} \quad \text{(T. §. 106. Zus.)}$$

Also $CE = AT . \text{cos. } CT$; wo CT die Abweichung.

Wegen des weit kleineren scheinbaren Durchmessers der übrigen Planeten, wie auch des Mondes, wenn er nicht gerade eine volle Scheibe zeigt, mußte man auf andere Methoden denken, den scheinbaren Durchmesser zu messen. Man erfand das Mikrometer, wozu Huygen die erste Idee gab, indem er ein immer breiter werdendes Blech ins Fernrohr schob, bis es den beobachteten Planeten deckte; Kirch, ein Berliner Astronom, schloß des Planeten Bild zwischen 2 Schrauben ein, und die Anzahl der Schraubenwindungen gab den scheinbaren Durchmesser. Auf derselben Idee beruhen die Faden- Haar- und Glasmikrometer u. s. w.

Fig. 16.

Weiß man den scheinbaren Halbmesser AOC und die Weite CO des Planeten vom Auge des Beobachters, so kann man auch aus $r : \text{Sin. } AOC = CO : CA$ den wahren Halb- oder Durchmesser des Planeten finden,

und

und hieraus weiter seine Oberfläche und Solidität (s. die angehängte Tabelle, wo die 2te Columne für die angeführten Durchmesser diese so giebt, wie uns die Planeten erscheinen würden, wenn sie nicht weiter als die Sonne von der Erde abstünden).

Den mittleren scheinbaren Durchmesser der Sonne fand man = 32′ 6″, indem sie uns nämlich gegen den 31ten December um 1′ 5″ größer erscheint, als gegen den 30ten Junius. Zu jener Zeit ist ihr scheinbarer Durchmesser = 32′ 38″, 5, zu dieser = 31′ 33″, 5.

Hieraus schließt man nach optischen Grundsätzen, daß uns die Sonne im Winter näher, als im Sommer sey. Da nun jene Zahlen das Maximum und Minimum des scheinbaren Sonnendurchmessers zugleich angeben; so verhält sich die größte Weite der Sonne von uns zur kleinsten, wie jene Zahlen, d. i. beynahe wie 103 : 100.

Setzt man daher die größte Entfernung der Sonne von uns = 20961000, die kleinste = 20268000 Meilen gefunden; so ist uns die Sonne im Winter fast 700000 M. näher, als im Sommer, und die mittlere Distanz = 20600000 M. Also ihr wahrer Durchmesser über 192000 M. oder 112mal größer, als der der Erde, den man = 1719 M. setzt.

Aus dem, daß uns die Sonne beständig scheibenförmig erscheint, schließen wir mit Recht, daß sie die Kugelgestalt habe; folglich ist der Sonne Oberfläche 112^2 d. i. 12544mal größer, als die der Erde, und

ihre

ihre Solidität übertrifft die der Erde 1400000mal, oder so viele Erdkugeln könnte man gleichsam aus der einzigen Sonnenkugel schneiden.

Die Axendrehung der Sonne und der übrigen Hauptplaneten.

§. 17. Die Axendrehung der Sonne wird durch die zuerst von Joh. Fabricius im Anfange des J. 1611 zu Augsburg, dann einige Monate später von Scheiner zu Ingolstadt entdeckten Sonnenflecken außer Zweifel gesetzt. Diese rücken nämlich in $13\frac{1}{2}$ T. regelmäßig vom östlichen Sonnenrande zum westlichen, und kommen wieder nach Verlauf derselben Zeit, binnen welcher sie unsichtbar sind, am östlichen Rande zum Vorschein, so, daß sie nach 27 T. 12 St. 20′ wieder auf derselben Stelle der Sonnenscheibe erscheinen. Diese Fläche, auf welcher sich die Flecken bewegen, ist die auf die Fläche der Ecliptik senkrechte Fläche eines größten Kreises. Denn jede von der Ferne gesehene Kugel erscheint uns als größter Kreis, dessen Axe durch das Aug des Beobachters geht; dieser Kreis ist also, als größter Kreis, dessen Fläche durch den Mittelpunkt der Sonnenkugel und unser Aug gezogenen geraden Linie geht, d. i. auf die durch diese gerade Linie gehende Fläche der Ecliptik (in welcher der Mittelpunkt der Sonne und unser Aug sich beständig befindet,) senkrecht.

Demnach bewegt sich die Sonne regelmäßig von Westen nach Osten um ihre Axe, welche man durch diejenigen

gen beyde Punkte der Sonnenoberfläche (der Sonne. Pole) gezogen denkt, welche man bey jener Bewegung immer auf derselben Stelle erblickt. Die Zeit dieser Axendrehung ist 25 T. 14 St. 8′, also etwas kleiner, als jene für die Bewegung der Flecken. Allein dieses kömmt daher, weil während dieser Zeit, wo die Sonnenflecken wieder auf derselben Stelle erscheinen, die Sonne in derselben Richtung scheinbar fortgerückt, folglich ihnen gleichsam entgegengekommen ist.

Der im gleichen Abstande von den Polen der Sonne gezogene größte Kreis heißt Sonnenäquator. Jeder sich in ihm befindliche Flecken beschreibt daher diesen Kreis in 25 ½ T. Jeder andere Flecken beschreibt einen Parallelkreis. Fiele nun der Sonnenäquator mit der Fläche der Ecliptik, die durch unser Aug, das sich in ihrem Mittelpunkte befindet, geht, zusammen; so müßten wir, weil uns jeder gegen unser Aug nicht schiefliegender Kreis, aus der Ferne betrachtet, als gerade Linie (wie die Ecliptik mit ihren Parallelkreisen) erscheint, auch den Sonnenflecken beständig in gerader Richtung fortrücken sehen. Aber dieß geschieht nur zweymal des Jahres: Ende Novembers, wo die Sonne in 8° ♐, und Ende Märzes, wo sie im 8° ♊ steht. Zu jeder andern Zeit beschreiben sie halbe schmale Ellipsen, welche zwischen jenen 2 Zeiten aufwärts, in der andern Jahres Hälfte unterwärts gebogen, und Ende Februars, wenn die Sonne im 8° ♓, und Ende Augusts, wo sie im 8° ♍ ist, am weitesten offen, oder am breite-

sten

sten sind. Also durchschneidet der Sonnenäquator die Ecliptik, und zwar unter einem Winkel von 7° 28′ 10″, liegt folglich noch im Thierkreise.

Denn zu den zuletzt genannten Zeiten findet man mittelst des Mikrometers, daß sich jedesmal die Breite der vom Sonnenflecken beschriebenen Ellipse zu ihrer Länge, oder die kleine Axe zur großen verhält, wie 13: 100. Nun erscheint uns aber ein schiefliegender Kreis als Ellipse, deren großen Axe sich zur kleinen verhält, wie der Sin. tot. zum Cos. des Neigungswinkels, welchen die Kreisfläche mit der Fläche macht, die durch unser Aug geht (§. 20. Zus. 8. der Kegelschn.); also 100: 13 = r: cos. des Neigungswinkels, den die Fläche des Sonnenäquators mit der Fläche des größten, auf die Ecliptik senkrechten Kreises bildet, auf welcher sich die Flecken bewegen. Nun ist dieser Winkel nur das Complement des Neigungswinkels des Sonnenäquators zur Ebene der Ecliptik, also 100: 13 = r: Sin. dieses letzteren Neigungswinkels, woraus man diesen = 7° 28′ 10″ findet.

Die Beobachtung der Flecken der Venus war es auch, woraus Cassini ihre Axendrehung schloß; er setzt die Zeit = 23 St.; indessen ist diese Dauer der Axendrehung schwer zu beobachten. Eben so ist man nun gewiß, daß sich Jupiter in 9 St. 52′ oder 56′ um seine Axe drehe, und die wahrscheinlichste Neigung des Aequators dieses Planeten zu seiner Bahn ist 3° 12′. Auf

ähn-

ähnliche Art beobachtete und berechnete man die Axendrehung der übrigen Planeten und die Neigung ihres Aequators zur Bahn; wie dieß in der beygefügten Tabelle zu sehen ist.

Das Zodiakal- und Nordlicht.

§. 18. Das Zodiakallicht (lumen zodiacale) ist ein weißlicher Schimmer, oft ganz ähnlich dem der Milchstrase. Besonders in den ersten Tagen des Märzes, wo uns der Thierkreis bald nach Sonnenuntergang gerade herauf und hoch liegt, sehen wir ihn nach Sonnenuntergang in Gestalt einer Pyramide, deren Grundfläche die Sonne ist; aber in der heißen Zone, für welche der Thierkreis jene Lage beständig hat, sieht man auch das Zodiakallicht immer. Dieser Schimmer hat oft eine Länge von mehr als 100°, und seine Lage kömmt beynahe mit der des Sonnenäquators überein. Vielleicht wegen der Rotation der Sonne erscheint er in Gestalt eines Sphäroids. Mairan, der in seinem „traité des Aurores boréales“ eine sehr genaue Beschreibung des Zodiakallichtes gegeben hat, vergleicht es mit dem Schimmer der Nebelsterne.

Wahrscheinlich ist dieses Licht nichts anders, als die Sonnenatmosphäre (welche also eine eigentliche Photosphäre ist), die wegen der Axendrehung der Sonne, in der Richtung ihres Aequators, die größte Schwungkraft erhält, und vom Mittelpunkte der Sonne bis auf unsere Erde und noch weiter weggetrieben wer-

den

den kann: was auch die große Länge dieses Lichtschimmers beweist.

Demnach würden wir den Sonnenkörper an und für sich als dunkel, die Sonnenflecken als Stellen der Sonnenoberfläche, die sogenannten Sonnenfackeln aber etwa wie starke Mischungen solcher glänzenden, elastischen Flüßigkeiten betrachten müssen, welche sich in der Photosphäre der Sonne erzeugen. Hiemit stimmt Herschel's Meinung überein: dieser hält nämlich das Sonnenlicht eigentlich für Sonnenwolken, die durch beständige Zersetzungen verschiedner phosphorischen, glänzenden, elastischen Flüßigkeiten in der Sonnenatmosphäre entstehen.

Das Nordlicht (aurora borealis) ist ein leuchtendes Phänomen, gewöhnlich an der Nordseite des Himmels bald nach Sonnenuntergang wahrnehmbar. Das Licht ist oft hochroth und feuerfarben, aus welchem helle Lichtsäulen gegen das Zenith emporsteigen. Weiter gegen Norden sind die Nordlichter weit häufiger zu sehen, als bey uns; sie zeigen sich rings um der Erde Nordpol, und nicht selten mit dem so genannten Queerbande, einem vorzüglich hellen Lichtstreifen, von Osten nach Westen gehend, aus dem an verschiedenen Stellen wieder besonderes Licht in Form von Kronen, Sonnen u. d. gl. sehr lebhaft ausstralt. Mairan glaubte die Ursache dieses Phänomens in dem Zodiakallichte zu finden, indem die Erde zuweilen in die Grenze der Sonnenatmosphäre trete, und hievon Theile vermöge der Fliehkraft

kraft in ihren eigenen Luftkreis aufnehme, die sich dann hauptsächlich wegen ihrer geringen Schwungkraft sammeln müßten und leuchteten. Hell erklärte das Nordlicht für ein optisches Meteor, entstehend aus der Zurückwerfung des Sonnenlichtes von platten Eistheilchen. Halley erklärt dieses Licht als ein Ausströmen der magnetischen Materie aus dem Nordpole, welche sich am Aequator hin zerstreue, dann sammle, und in den Südpol einströme. Man will nämlich bemerkt haben, daß das Nordlicht die Magnetnadel affizire, und ihre Richtung verändere. Franklin erklärte es als elektrische Erscheinung, indem die von der heißen Zone zu den Polen strömende, mit Dünsten verbundene elektrische Materie an der kalten Eisrinde der Polargegenden eine schlechte Ableitung finde, sich von da wieder aufwärts über die Atmosphäre erhebe, daselbst in Lichtbüscheln ausströme, und der besser leitenden Luft der gemäßigten Erdstriche folge, woselbst sie dann wieder in die Erde zurückkehre.

Eine ähnliche Erscheinung ist für die Südländer das Südlicht (aurora australis), welches sich um so stärker zeigt, je näher man dem Südpole kömmt. Forster sah es mit Cook auf seiner Reise um die Erde im J. 1773 das erstemal; er lieferte uns dann die erste Beschreibung dieses Lichtes.

B. Vom Monde.

Mondsdurchmesser, und Mondsbewegung.

§. 19. Daß uns auch der Mond bald näher, bald ferner ist, wie die Sonne, beweist man ebenfalls aus der veränderlichen Größe seines scheinbaren Durchmessers. Das Maximum desselben ist über 33′ das Minimum 29′, 5, also der mittlere scheinbare Mondsdurchmesser = 31′ 20″. Da nun, wie wir hier als gefunden voraussetzen, die größte Weite des Mondes von der Erde = 55000 Meilen; die kleinste = 48000; die mittlere = 51000, die mittlere Entfernung aber der Sonne = 20½ Million M.; so ist diese 400mal weiter von uns weg, als der Mond.

Den wahren Durchmesser des Mondes findet man aus dem Gesagten = 470 M. oder $\frac{3}{11}$ des Durchmessers der Erde, und daher seine Solidität 49mal kleiner, als die der Erde.

Derjenige Punkt der Mondsbahn, in welchem dieser Nebenplanet am weitesten von uns entfernt ist, heißt Erdferne (apogaeum). In dieser hat der Mond seine langsamste Bewegung, so wie er sich in demjenigen Punkte, wo er uns am nächsten ist, der Erdnähe (perigaeum) am geschwindesten bewegt. Beyde Punkte rücken jährlich 41° von Westen nach Osten fort, durchwandern daher in nicht vollen 9 Jahren den ganzen Thierkreis. Des Mondes mittlere Bewegung beträgt stündlich 32, 9″, und täglich 12° 51′ 36″.

Die

Die Mondsbahn schneidet die Ecliptik in 2 Punkten unter einem Winkel von 5° ¼ oder 5° 8′ 52″. Denn nur soweit entfernt sich der Mond nördlich und südlich von der scheinbaren Sonnenbahn. Jene 2 Durchschnittspunkte heißen Mondsknoten; der eine Knoten, in welchem der Mond über die Ecliptik geht wird der aufsteigende Knoten (caput draconis) ☊, der andere der niedersteigende Knoten (cauda draconis) ☋ genannt. (Die vorigen, wie diese Erklärungen, rücksichtlich des Mondes gegeben, gelten auch für die Hauptplaneten.) Die Mondsknoten bewegen sich von Osten nach Westen, oder gehen jährlich um 19° zurücke, so, daß sie in der Periode von 18 J. 228 T. (Mondscykel — cyclus lunaris) um den ganzen Thierkreis herumgehen.

Man unterscheidet folgende verschiedene Umlaufszeiten des Mondes:

1. Die Zeit der Rückkehr des Mondes zu demselben Aequinoctialpunkte heißt seine tropische Umlaufszeit = 27 T. 7 St. 43′ 4″, 6.

2. Die Zeit seiner Rückkehr zu demselben Fixstern, die siderische Umlaufszeit ist 7″ größer, als die tropische, weil binnen jenen 27 T. die Länge des Fixsterns beynahe um 4″ gewachsen ist, folglich der Mond noch 7″ Zeit braucht, um wieder einerley Länge mit dem Fixstern zu bekommen.

3. Die Rückkehr des Mondes zur Sonne (oder die Zeit von einem Neumonde zum andern) heißt die synodische Umlaufszeit, oder Mondsmonat = 29 T. 12 St. 44′ 3″; ist also 2 T. 5 St. 0′ 58″, 4 größer, als die tropische Umlaufszeit, weil der Mond jenen Ueberschuß noch braucht, um die während der letztern Zeit über 27° nach Osten fortgerückte Sonne einzuholen.

4. Die Rückkehr des Mondes zu demselben Knoten wird draconitischer Monat genannt; er enthält 27 T. 5 St. 6′ 56″. Während der tropischen Umlaufszeit geht nämlich der Knoten $1°\frac{1}{2}$ von Osten nach Westen zurück, kömmt also dem Monde gleichsam entgegen, daher dieser Monat kleiner ist, als die tropische Umlaufszeit.

5. Die Rückkehr des Mondes zum Apogäum heißt anomalistischer Monat = 27 T. 13 St. 18″ 35″; also größer, als die tropische Umlaufszeit, weil die Erdferne mittlerweile schon 3° von Westen nach Osten fortgerückt ist.

Da uns der Mond beynahe immer dieselben Flecken, Berge, Ringgebirge, Bergsketten . . ., also beynahe immer dieselbe Seite zukehrt; so schließen wir, daß er sich, wie die Sonne, um seine Axe von Westen nach Osten drehe, und zwar in 27 T. 7 St. 43′ 4″, 6, d. i. derselben Zeit, binnen welcher er um die Erde läuft.

Der

Der einfache Grund hievon ist: will sich Jemand um einen Gegenstand so bewegen, daß er ihm immer dieselbe Seite zukehrt; so muß er sich nothwendig während der Zeit, in welcher er sich um jenen Gegenstand bewegt, einmal um sich selbst herumdrehen. Die Ursache aber, warum uns der Mond fast immer dieselbe Seite zukehrt, setzen Newton und Lagrange in die gegen den uns zugewendeten Mondstheil stärkere Attraction der Erde, als gegen den von uns weggewendeten Theil.

Zuweilen kommen jedoch an dem einen Mondsrande andere Flecken zum Vorschein, und andere verschwinden am entgegengesetzten Rande, so, daß es aussieht, als ob der Mond bald nach Osten oder Westen (oder der Länge nach), bald nach Norden oder Süden (oder der Breite nach) etwas hin und her schwanke. Diesen Schein nennt man das Schwanken (libratio) des Mondes. Das der Länge nach erklärt man aus der bey gleichförmiger Axendrehung sehr veränderlichen, bald beschleunigten, bald wieder retardirten Bewegung des Mondes in seiner Bahn; aber das scheinbare Schwanken der Breite nach kömmt daher, weil wir, deren Auge sich im Mittelpunkte der Ebene der Ecliptik befindet, zur Zeit, wo der Mond sich über die Ecliptik erhebt, unter dem Monde wegschauen, mithin einen kleinen Theil der Mondskugel, der sonst von uns weggewendet ist, sehen. Zur Zeit aber, wo der Mond unter der Ecliptik steht, sehen wir etwas über ihn weg,

neh-

nehmen folglich einen kleinen Theil seiner nördlichen abgekehrten Seite wahr.

Wenn man sich demnach, wie bey der Sonne, um die Mondskugel einen größten Kreis in einem Abstande von 90° von den äußersten Punkten der Mondaxe gelegt vorstellt; so ist dieser Kreis der Mondsäquator. Nun bemerkt man, daß die Flecken des Mondes, wenn er nahe an einem seiner Knoten und zugleich in der Erdnähe ist, gerade Linien, aber zu jeder andern Zeit Curven, wie die Sonnenflecken, beschreiben; daher liegt auch der Mondsäquator nicht in der Ebene der Ecliptik, sondern schneidet diese unter einem Winkel von $1°\frac{1}{2}$.

Scholion. Die von Schröter nach seinen vieljährigen Beobachtungen des Mondes ausgeführte Selenotopographie („Selenotopographische Fragmente zur genauern Kenntniß der Mondsfläche, ihrer erlittenen Veränderungen und Atmosphäre I. B. Lilienthal 1791. II. B. 1802. Mit vielen Kupfern. gr. 4.) ist ein nicht leicht übertreffbares Werk. In meinem Lehrb. der Geom. S. 121 habe ich eine Methode, die Höhe der Mondsberge zu messen, dargestellt, und daselbst bemerkt, daß die größte Höhe eines Mondsberges nur zu 25000 franz. Fußen von Schröter angenommen werde. Daß der Mond eine Atmosphäre habe, schloß Schröter aus einer 1792 wirklich beobachteten Mondsdämmerung, und aus deren Größe die geringe Höhe von etwa 5000 Fußen des untersten, dichtesten Theiles

jener Atmosphäre, welcher die Sonnenstralen noch zu reflectiren vermag.

Lichtgestalten des Mondes.

§. 20. Da wir immer nur den der Sonne zugekehrten Mondstheil, z. B. nach Sonnenuntergang, wenn der Mond in Westen steht, den westlichen, und vor Sonnenaufgang, wenn er in Osten steht, den östlichen Mondstheil sehen; so ist der Mond eine dunkle Kugel, ihr Licht von der Sonne empfangend, welche nur den ihr zugewendeten Theil des Mondes erleuchtet. Daher erscheint uns der Mond selten als volle Scheibe, sondern während seines jedesmaligen Umlaufes um die Erde in verschiedenen Lichtgestalten, oder Lichtabwechslungen (Mondsbrüche, phases lunae).

Fig. 17.

Es stelle T die Erde, a b c d die Mondsbahn und S die 400mal weiter, als der Mond, von der Erde entfernte Sonne vor. Weil nun der Mondsdurchmesser gegen die Weite der Erde als verschwindend zu betrachten ist; so muß man die Durchmesser der erleuchteten Mondsscheibe immer einander parallel vorstellen.

1. Steht nun der Mond in a, gerade zwischen der Sonne und Erde, so steht er mit der Sonne an einem Orte des Himmels, oder ist in Conjunktion mit der Sonne (☌☉), wendet seine dunkle Halbkugel völlig

gegen

gegen uns, oder wird unsichtbar: dann ist Neumond (Neulicht — novilunium).

2. Rückt von da der Mond links in seiner Bahn fort, oder entfernt er sich für uns von der Sonne gegen Osten; so kehrt er uns wieder nach Sonnenuntergang am westlichen Horizonte einen kleinen Theil seiner erleuchteten Seite unter der Gestalt einer schmalen Sichel zu (luna falcis instar cornuta). Am 4ten Tage nach dem Neumonde, wenn der Mond 45° östlich von der Sonne entfernt ist, wird die Lichtgestalt immer breiter, bis uns der Mond am 8ten Tage in b, wo er 90° von der Sonne entfernt ist, die Hälfte seiner erleuchteten Seite zuwendet. Diese Lichtgestalt (luna dichotoma, s. bisecta) nennt man das erste Viertel (quadratura prima).

3. Des Mondes Licht wächst von da noch immer mehr (luna gibbosa), bis er endlich am 15ten Tage bey 180° Entfernung von der Sonne in Opposition mit dieser (☌ ☉) kömmt, d. i. der Sonne am Himmel gegenüber steht, folglich aufgeht, wann die Sonne untergeht. In dieser Stellung kehrt er der Nachseite der zwischen ihm und der Sonne stehenden Erde seine erleuchtete Halbkugel zu — es ist Vollmond (plenilunium).

4. Bis hieher war der Mond immer in Zunahme (luna crescens); beym Abnehmen desselben, indem er sich immer mehr von der Sonne von Westen gegen Osten entfernt, kommen den vorigen ähnliche Lichtgestalten wie-

der zum Vorschein, nur daß die Lage der Mondshörner geändert ist. Das letzte Viertel (quadratura secunda) ereignet sich 7 Tage nach dem Vollmonde, wo der Mond in d 270° ostwärts oder noch 90° westwärts von der Sonne steht. Dann sehen wir ihn des Morgens am östlichen Himmel immer sichelförmiger, bis er nach 29 Tagen abermals bey der Sonne erscheint.

Diesen Wechsel der Mondsgestalten nennt man den Mondwechsel (lunatio), Neumond und Vollmond die Syzygien (Syzygiae); erstes und letztes Viertel die Quadraturen.

Daß indessen der Mond im Neulichte uns nicht völlig unsichtbar ist, sondern ein graues, schwachröthliches Licht zeigt, erklären wir so: Da auch die Erde ihr Licht von der Sonne empfängt; so müssen für die Mondsbewohner die nämlichen Lichtabwechslungen der Erde statt finden, wie für die Erdbewohner die Mondsgestalten. Jene müssen also die Erde als volle leuchtende Scheibe sehen, wann wir den Mond nur wenig gehörnt erblicken. Weil nun die Oberfläche der Erde 14mal größer ist, als die des Mondes, folglich auch das Erdlicht fast 15mal das Mondlicht übertrifft; so kann von der Erde soviel Sonnenlicht auf den Mond, und von diesem wieder zur Erde zurückegeworffen werden, als nöthig ist, den Mond noch zum Theil sichtbar zu machen.

Wie der Mond, so erscheinen auch Merkur und Venus, durch Teleskope betrachtet, in verschiedenen

Licht-

Lichtgestalten. Auch Mars erscheint nicht immer ganz erleuchtet, sondern ein kleiner Theil seiner Scheibe ist zuweilen dunkel und zwar so, daß dieselbe Seite beständig der Sonne zugekehrt ist. Es sind also diese Planeten an und für sich dunkle Körper, welche, wie der Mond, ihr Licht von der Sonne empfangen.

Mondsfinsternisse.

§. 21. Das Ereigniß am Himmel, wo wir den Mond zur Zeit seiner Opposition mit der Sonne, oder zur Zeit des Vollmondes seines Lichtes beraubt sehen, indem es uns vorkömmt, als rücke eine schwarze Scheibe von Morgen gegen Abend durch den Mond, diesen mehr oder weniger bedeckend — dieses Ereigniß nennen wir Mondsfinsterniß (eclipsis s. defectus lunae). Jene schwarze Scheibe ist eigentlich nichts anders, als der Schatten der Erde, welche zur Vollmonds Zeit zwischen Sonne und Mond steht; — die Verfinsterung des Mondes ist daher nichts anders, als ein Treten des Mondes in den Erdschatten. Geht nun der ganze volle Mond durch den Erdschatten, so, daß er gar kein Licht von der Sonne erhalten kann; so ereignet sich eine totale Mondsfinsterniß; in jedem andern Falle hat man nur eine partielle. Jene ist entweder eine totale mit Dauer (totalis cum mora), oder ohne Dauer, je nachdem der in den Erdschatten eingesenkte Mond entweder eine Zeitlang in demselben verweilt, oder nicht. Fallen endlich die Mittelpunkte des Schattens und der

Mond-

Mondscheibe auf einander; so heißt die Mondsfinsterniß central, wobey die totale Mondsfinsterniß 1 $\frac{3}{4}$ St. dauern kann.

Fig. 18.

Es sey die Sonne in S, in C die Erde, EHF der von den äußersten Sonnenstralen AH und BH begrenzte wahre Erdschatten, welcher nach Grundsätzen der Optik kegelförmig ist, und sich bis nach H, etwa 217 Erdhalbmesser weit von ECF erstreckt. Da nun der Mond nur 60 Erdhalbmesser von C entfernt ist; so kann er, wenn ML einen Theil der Mondsbahn vorstellt, bey r, wo er von der Erde aus der Sonne gegenüberstehend gesehen wird, mit seinem östlichen Rande in den Schatten treten, bey m gänzlich verfinstert werden, und bey t wieder den Schatten verlassen.

Die Ursache, warum nicht bey jedem Vollmonde eine Finsterniß entstehen müsse, ist auf folgende Art leicht einzusehen: Wenn die Papierfläche, worauf die Figur verzeichnet ist, die Ebene der Ecliptik vorstellt; so wird diese von der Mondsbahn ML unter einem Winkel von $5^{\circ}\frac{1}{4}$ (§. 19.) geschnitten. Die gerade Linie, in welcher der Schnitt geschieht, heißt die Knotenlinie; von dieser wird also die Mondbahn in 2 Theile getheilt, deren einer über, der andere unter die Fläche der Figur fällt, in welcher die Knotenlinie selbst liegt.

Wenn demnach zur Zeit des Vollmondes, wo der Mond nach r kömmt, die Knotenlinie nicht weit von der

Lage

Lage Cm abweicht, d. i. wenn ein Mondsknoten in oder nahe bey m fällt; so wird der Mond der Ebene der Ecliptik nahe kommen, und folglich den Erdschatten treffen können. Ist er aber zur Vollmondszeit von seinem Knoten zu weit entfernt, so kann er, nach der Lage der Figur zu reden, entweder unter oder über den Erdschatten weggehen, mithin gar nicht verfinstert werden.

Nun ist der größte scheinbare Halbmesser dieses Schattens 47 Min., und der des Mondes 17′; folglich kann keine partielle Mondsfinsterniß mehr eintreffen, wenn der Abstand des Mittelpunktes des Mondes von der Ecliptik, oder seine Breite, im Augenblicke des Vollmonds 64′ = 47′ + 17′ übersteigt, wo dann der Mond von seinem nächsten Knoten 12° bis 13° entfernt wäre. Eine totale Verfinsterung wird unmöglich, wenn die Mondsbreite 30′ = 47′ — 17′ übersteigt, in welchem Falle die Entfernung des Mondes vom nächsten Knoten über 6° betragen muß. Dieß erläutert Fig. 19., wo ☊ den Knoten des Mondes, EL☊ die Ecliptik, C☊ die Mondsbahn vorstellt. Steht im Augenblicke des Vollmondes der Erdschatten in E, 13° von ☊ entfernt, so, daß EC 47′ + 17′ beträgt; so streicht der Mond C nur gerade an Erdschatten Gin. Aber bey L, 6° von ☊, ist die größte Entfernung, in der sich noch der Mond ganz in den Erdschatten einsenken kann.

Daher kann manches Jahr gar keine Mondsfinsterniß vorfallen; aber gewöhnlich fallen jedes Jahr zwey vor.

vor. Daraus ferner, daß der Erdschatten in der Gegend der Mondsbahn noch 3mal breiter, als der Mond erscheint, sieht man ein, daß eine Mondsfinsterniß mit Dauer möglich sey. Bey der centralen muß der Mond im Punkte seines Knotens selbst seyn.

Der Halbschatten EHI, FHK (Fig. 18.), welcher immer dunkler wird, und sich in den wahren Schatten allmählig verliert, macht die Bestimmung des Anfangs der wahren Verfinsterung sehr schwer und unsicher.

Die Mondsbewohner (Seleniten), so lange sie sich in jenem Halbschatten der Erde befinden, sehen eine partielle Sonnenfinsterniß: so wird ihnen, wenn der Mond in M steht, vom Erdrande F zuerst der Sonnenrand A von der Erde bedeckt, und so fort immer ein größerer Theil, bis der Mond in m kömmt, wo sie die Sonne ganz verfinstert sehen.

Die Umstände einer Mondsfinsterniß durch blose Zeichnung und durch den Calcul zu bestimmen.

§. 22. Uebrigens läßt es sich leicht einsehen, wie es den Astronomen, welche die Bewegung des Mondes und der Sonne genau kennen, möglich ist, eine Finsterniß viele Jahre vorher zu sagen. Die Umstände aber einer Mondsfinsterniß, nämlich den Anfang, das Mittel und Ende derselben u. s. w. vermögen sie erstens durch blose Zeichnung auf folgende Weise zum Vorhersagen zu bestimmen:

1. Es sey die relative stündliche Bewegung des Mondes = 35′. Wenn zwey Planeten, wie die Sonne und der Mond, durch eigenthümliche Bewegung zur Conjunktion und Opposition kommen; so hat man dieselbe Erscheinung, wenn man den einen als ruhig, und blos den andern als bewegt denkt. Bewegt sich z. B. der eine Planet stündlich um 36′ gegen Osten, und der andere um 2′ von derselben Seite her; so beträgt die Aenderung, einen Planeten auf den andern bezogen, nur 34′; sie werden demnach in denselben Abstand von einander kommen, ob man beyde bewegt, oder den einen ruhend und nur den andern mit der relativen Bewegung = 34′ in der nun relativen Bahn fortgerückt vorstellt. Der Abstand, in welchem uns die 2 Planeten, aufeinander bezogen, erscheinen, ist eine kleine gerade Linie, die Hypotenuse eines Dreyecks, dessen 2 Seiten sind der Unterschied der Länge und der Unterschied der Breite; es wird folglich jener Abstand derselbe seyn, sobald man dieselben Unterschiede in der Länge und der Breite hat, man mag sich beyde, oder nur einen bewegt vorstellen.

Man kann also ein Dreyeck MNO (Fig. 20.) bilden, wo jede der Seiten MN, NO gleich ist dem Unterschiede der stündlichen Bewegung in der Länge und Breite; der Winkel OMN stellt die Neigung der relativen Bahn, und MO die stündliche Bewegung in dieser Bahn vor. Man kann in M die Sonne ruhend und den Mond durch MO bewegt denken. Mittelst dieses

Drey-

Dreyeckes läßt sich nun die Größe der relativen stündlichen Bewegung MO so entwickeln:

MN : NO = r : tang. OMN, und
cos. OMN : r = MN : MO (T. §. 61.).

Bey den Mondsfinsternissen ist nicht selbst die Sonne, sondern der ihr entgegengesetzte Punkt, oder der Mittelpunkt des Erdschattens, als der eine der 2 Planeten zu betrachten; dieser Punkt hat dieselbe stündliche Bewegung in der Länge, wie die Sonne. Da aber diese keine Bewegung in der Breite hat; so muß man die vom Monde allein in der ersten Proportion gebrauchen.

Beyspiel. Bey der Mondsfinsterniß den 17ten März 1764 (welche als Beyspiel allem Folgenden zum Grunde liegt) findet man aus den Tabellen, daß der Vollmond oder die wahre Opposition um 12 U. 4′ 59″ eintreffen mußte; die stündliche Bewegung des Mondes war 37′ 23″ in der Länge und 3′ 26″ in der Breite; die stündliche Bewegung der Sonne 2′ 29″, also die Differenz der stündlichen Bewegungen 34′ 54″. Diese verhält sich nun zu 3′ 26″, wie der Halbmesser zur Tangente der relativen Neigung, welche = 5° 37′ gefunden wird. Dadurch hat man cos. 5° 37′ : r = 34′ 54″ : 35′ 4″, d. i. die stündliche Bewegung des Mondes in der relativen Bahn.

2. Der Halbmesser des Erdschattens in der Gegend der Mondsbahn sey = 40′.

Es seyen Fig. 21. S, T und L die Mittelpunkte der Sonne, Erde und des Mondes zur Zeit der Opposition; SA, TB, LC die Halbmesser der Sonne, Erde und des Erdschattens in der Gegend, wo der Mond durch ihn gehen muß; diese Linie LC ist der Halbmesser des Kreises, welcher den auf die Axe des konischen Erdschattens in der Gegend des Monds senkrechten Schnitt bildet.

Der am Erd-Mittelpunkte gebildete Winkel CTL ist der Winkel, unter welchem uns die Bewegung des Mondes oder der Bogen seiner Bahn erscheint, welchen er während der halben Dauer der Finsterniß von C nach L beschreibt.

BAT ist der Winkel, unter welchem der Erdhalbmesser BT, vom Sonnenrande aus gesehen, erscheint. Da nun dieser Winkel nicht merklich von dem verschieden ist, unter welchem BT, vom Mittelpunkte der Sonne aus gesehen, erscheint, dieser Winkel aber die Sonnenparallaxe heißt; so stellt BAT diese Parallaxe, wie BCT die Mondsparallaxe vor. Nun sind beyde Winkel dem äußern Winkel CTD gleich, und man erhält CTL, wenn man von CTD den W. LTD = ATS, dessen Maß der scheinbare Sonnenhalbmesser ist, abzieht; folglich bekömmt man den scheinbaren Halbmesser des Erdschattens CL, oder CTL, wenn man von der Summe jener Parallaxen den scheinbaren Halbmesser der Sonne abzieht.

So

So war zur Zeit der oben angeführten Opposition die Parallaxe des im Horizonte stehenden Mondes, oder dessen Horizontalparallaxe = 60′ 52″; die der Sonne ist beständig = 8″ ½; beyder Summe also war = 61′, davon den scheinbaren Halbmesser der Sonne = 16′ 5″ abgezogen, bleibt für den Halbmesser des Schattens 44′ 55″. Hiezu muß man ungefähr 45″ d. i. so viel Sekunden hinzuthun, als man Minuten hat, weil durch die Atmosphäre der Erde der Schatten fast um $\frac{1}{60}$ vermehrt erscheint.

3. Es sey nun KAG (Fig. 22.) der Umfang des Erdschattens, in welchen der Mond bey einer Finsterniß tritt; KOG ein Theil der Ecliptik; O der der Sonne entgegengesetzte Punkt der Ecliptik, oder der Mittelpunkt des Erdschattens. Vermöge 2) theile man diesen in 46 gleiche Theile. Ist die bekannte Breite des Mondes = 39′; so nehme man auf der auf KG in O senkrechten Linie 39 gleiche Theile; denke sich durch den Endpunkt L eine zur Ecliptik KOG parallele Linie gezogen, zu welcher sich die gerade durch L zu ziehende Linie ELS unter einem Winkel von 5° 37′ neige. Diese Linie stellt also die relative Mondsbahn vor. Auf dieser von L nach X trage man, weil die relative stündliche Bewegung = 35′, eben soviele gleiche und solche Theile auf, wie man sie auf OG machte. Hat man bey L die Zeit der Opposition 12 U. 5′ bemerkt; so bemerkt man nun bey dem um die Größe der relativen stündlichen Bewegung von L entfernten Punkte X 11 U. 5′. Nun

theile man XL in 60 Zeitminuten. Dieselben Zirkelöffnungen dienen, die übrigen Theile der Mondsbahn in dieselbe gleiche Theile zu theilen. Endlich fasse man mit dem Zirkel 1° 2′, als die Summe der scheinbaren Halbmesser des Schattens und des Mondes; setze einen Schenkel in O, und sehe, auf welchen Theilpunkt der relativen Mondsbahn ELS der andere Schenkel treffe. Nach der Figur trifft er auf S, und man findet aus den Theilungen dieser Bahn, daß diesem Theilpunkte 13 U. 35′ entspricht. Dieß das Ende der Finsterniß. Würde man auf dieselbe Art den Punkt E bestimmen; so würde diesem Punkte auf den Theilungen entsprechen 10 U. 48′; dieß der Anfang der Finsterniß, wo der Mondsrand gerade den Erdschatten in P zu berühren anfängt. Wenn man aus O ein Loth auf die relative Mondsbahn zieht, und von L nach M, als der Finsterniß Mitte, zählt; so findet man LM = 6 Zeitminuten, folglich das Mittel der Finsterniß 12 U. 11′; daher denn die ganze Dauer = 2 St. 47′, die halbe Dauer = 1 St. 23′.

Wenn man auch OA eben so, wie OL theilte; so würde man AC, d. i. den verfinsterten Mondstheil = 23′ finden. Weil man aber die Finsterniß in Zolle oder 12 Theile des Mondsdurchmessers anzugeben pflegt; so schließe man: der scheinbare Durchmesser des Mondes (32′) verhält sich zu 12 Zoll, wie 23 zum 4ten Gliede, welches in Zollen den Theil AC bestimmt.

Zweytens durch den Calcul.

Wollte man alles genauer durch unmittelbare Berechnung finden, ungeachtet man bey einer Figur von 1 Schuh im Durchmesser mittelst der Zeichnung nicht um 1′ irren wird; so verführe man auf folgende Art:

Im △ OML, gebildet von dem Breitenkreise OL des Mondes und dem Lothe OM, ist der Winkel LOM gleich der Neigung der relativen Mondsbahn, indem das Loth OM auf die Mondsbahn und das Loth LO auf die Ecliptik nothwendig denselben Winkel bilden, als die Mondsbahn mit der Ecliptik. Da nun auch die Mondsbreite OL zur Zeit der Opposition bekannt ist; so findet man das Mittel LM der Finsterniß aus der Proportion:

r: Sin. LOM = OL: LM

r: Sin. 5° 37′ = 39′ 9″: 3′ 50″, und um das so in Gradtheilen gefundene LM in Zeit zu verwandeln, schließe man:

Die relat. stündl. Bew. ist zu 1 St., wie ML zur Zeit

35′ 4″: 3600″ = 3′ 50″: 6′ 34″

zwischen der Opposition und dem Mittel der Finsterniß. Diese so gefundene Zeit zieht man von der Zeit der Opposition ab beym Wachsen der Mondsbreite: im Gegentheile wird sie addirt. Nun nahm diese im oben angeführten Beyspiele ab, indem der Mond noch nicht zu seinem nächsten Knoten gekommen war; also findet man das Mittel der Finsterniß = 12 U. 4′ 59″ + 6′ 34″ = 12 U. 11′ 33″, oder den 18ten März um 0 U. 11′ 33″ Morgens.

In

In demselben Dreyecke findet man auch OM, oder den kürzesten Abstand des Mittelpunktes des Erdschattens von der Mondsbahn = 38′ 57″. Da folglich auch im △ OEM OE = OP + PE = dem scheinbaren Halbmesser des Erdschattens + dem scheinbaren Halbm. des Mondes (= 16′ 37″) bekannt ist; so findet man ME = 48′ 37″ im Bogen, oder, mittelst der Proportion

35′ 4″ : 3600″ = 48′ 37″ : x,

in Zeit, nämlich ME oder die halbe Dauer der Finsterniß = 1 St. 23′ 11″, d. i. = der Zeit, bis der Mond von E nach M kam. Zieht man diese Zeit vom gefundnen Mittel = 12 U. 11′ 33″ ab, oder addirt sie zu diesem; so findet man den Anfang der Finsterniß = 10 U. 48′ 22″, und deren Ende = 13 U. 34′ 44.″

Endlich ist AC = AM + MC; aber AM = OA + OM, daher AC = OA + MC — OM, oder man erhält den verfinsterten Mondstheil, wenn man von der Summe der Halbmesser des Erdschattens und des Mondes den gefundenen kürzesten Abstand MO abzieht, oder AC = 62′ 18″ — 38′ 57″ = 23′ 21″.

Nebst diesen Umständen muß man bey totalen Verfinsterungen die Immersion und Emersion des Mondes bey N und R (Fig. 23.) bestimmen. Man hat wieder das Dreyeck MOD, dessen Hypotenuse hier gleich ist dem Halbmesser des Erdschattens weniger dem Halbmesser des Mondes; eben so OV. Um die Immersion, wo der Mittelpunkt des Mondes in D ist, zu be-

bekommen, zieht man vom Mittel der Finſterniß die halbe Dauer der ganzen Verfinſterung ab; durch Addition beyder erhält man die Emerſion.

Iſt der Mond zur Zeit ſeiner Verfinſterung zugleich in der Erdferne; ſo geht er näher am Scheitel des Schattenkegels durch dieſen, und erſcheint röther und leuchtender, als wenn er in der Erdnähe iſt. Denn in dieſem Falle geht er durch einen breiteren und dunkleren Theil des Schattenkegels, und die durch die Erdatmoſphäre gebrochenen Lichtſtralen, die ſich ſonſt im Schattenkegel verbreiten, und deſſen Dunkelheit mindern, dringen nicht bis zur Axe des Schattenkegels. In dieſem Falle kann der Mond ganz unſichtbar werden: was jedoch eine Seltenheit iſt. Solche ſeltene Mondsfinſterniſſe waren 1620 den 15ten Jun. und 1601 den 9ten December nach Kepler's Zeugniſſe, und 1642 den 25ten April die von Hevel beobachtete.

Sonnenfinſterniſſe.

§. 23. Eine Sonnenfinſterniß entſteht, wenn der Mond zur Zeit ſeiner Conjunktion mit der Sonne, oder zur Zeit des Neumondes in oder nahe der Ecliptik ſteht. Eine dunkle Scheibe ſcheint dann an den weſtlichen Rand der Sonne zu treten, und nach dem öſtlichen vor der Sonne vorüber zu gehen. Zu jener Zeit ſteht nämlich der Mond zwiſchen Sonne und Erde, macht alſo, daß diejenigen Orte der Erde, die ſich gerade im Halbſchatten des Mondes befinden, nur von einem Theile

der

der Sonne, — andere aber, die sich im wahren Monds-schatten befinden, gar nicht von der Sonne erleuchtet werden; daß also für jene eine partiale, für diese eine totale Finsterniß eintrifft. Die Sonnenfinsterniß ist mithin eine eigentliche Erdfinsterniß.

Da der Mond der Erde 400mal näher ist, als die Sonne; so kann er, wie wir es beynahe täglich von einer vor die Sonne tretenden Wolke sehen, für einige Orte gerade vor der Sonne erscheinen, und sie ganz verdecken, während er zu derselben Zeit für andere Orte nur einen Theil, und für andere, die noch weiter weg liegen, die Sonne gar nicht verdeckt. Es sey nämlich die Erde in T (Fig. 24), der Mond in L und die 400mal weiter entfernte Sonne in S; so ist jener mit dieser in Conjunktion. Ist also der Mond gerade in einem seiner Knoten, d. i. in der Ecliptik; so ist die Sonnenfinsterniß für den Erdort O central. Nun ist der Winkel TSA oder TSF $= 8'' \frac{1}{2}$ (§. 22. unter 2)), folglich auch, wenn man Aa, Ff mit TS parallel zieht, der W. SAa $=$ SFf $= 8'' \frac{1}{2}$, d. i. für uns verschwindend; daher wird die so weit entfernte Sonne vom Orte A in a′, von F in f′, und von den Zwischenorten B, C... in b′, c′... gesehen. Stellt nun lm das vom Monde während der Sonnenfinsterniß durchlaufene Stück seiner Bahn vor; so sieht man in A, wenn der Mond nach l kömmt, seinen östlichen Rand am westlichen Sonnenrande in a′; mithin fängt für den Ort A gerade beym Aufgange der Sonne die Sonnenfinsterniß zuerst

an, obgleich der Mond noch mehr als 860 Meilen von L, also noch westlich von der Sonne S entfernt ist. Kömmt der Mond nach a; so erscheint die Sonne in a' central verfinstert. Also fängt die Centralfinsterniß für denjenigen Erdort A an, für den alsdenn die Sonne eben aufgeht, die Sonne geht folglich für ihn schon central verfinstert auf, ungeachtet jener großen Entfernung des Mondes von der Sonne. So wie nun der Mond weiter nach b, c, L... rückt; so erscheint für die Oerter B, C, O... nach der Reihe die centrale Finsterniß. Aber für den Ort F hört sie auf, und zwar bey Sonnenuntergang. Kömmt endlich der Mond nach m; so hört die Finsterniß gänzlich auf. So ist klar, daß binnen der ganzen Zeit, da der Mond 1719 Meilen durchläuft, die Sonne nach und nach für alle Oerter A, B, C... centralverfinstert werde; aber für alle Oerter, welche um jene auf beyden Seiten im Halbschatten des Mondes liegen, nach und nach eine partiale Finsterniß eintreffe.

Hieraus erhellt zugleich, daß der Calcul für die Sonnenfinsternisse viel weitläufiger und schwerer seyn müsse, als die Berechnung der Mondsfinsternisse. Denn da der Mond wahrhaft seines Lichtes beraubt wird; so wird er für die ganze Erde verfinstert; folglich ist diese Verfinsterung für alle, welche sie sehen können, vollkommen dieselbe. Lambert hat jedoch jenen Calcul theils in seiner ecliptischen Tafel, theils in seinen Beyträgen von S. 720 — 755 sehr erleichtert. Auch exi-

stiren

stiren sehr lehrreiche Beschreibungen einzelner Sonnen- und Mondsfinsternisse, z. B. Reccard's Abhandlung von der großen Sonnenfinsterniß 1764 den 1ten April.

Ist zur Zeit einer für einen Ort totalen Sonnenfinsterniß der scheinbare Mondsdurchmesser größer, als der der Sonne; so existirt für jenen Ort eine totale Finsterniß mit Dauer; aber ohne Dauer, d. i. nur für einen Augenblick, wenn beyde scheinbare Durchmesser gleiche Größe haben. Meistentheils ist der scheinbare Mondsdurchmesser kleiner, als der der Sonne; bey einer centralen Verfinsterung existirt dann die sogenannte ringförmige Sonnenfinsterniß, wobey der Ring überal von gleicher Breite, sonst aber von verschiedener Breite ist. Merkwürdig ist bey totalen Sonnenfinsternissen auch der um den Mond bemerkte helle Ring, woraus man auf eine Mondsatmosphäre schließen wollte, in welcher nämlich das Sonnenlicht gebrochen würde. Allein neuere Astronomen leiten diese Erscheinung von der Inflexion des Lichtes ab, indem jeder Körper, den man in das Sonnenlicht hält, einen lichten Saum um sich zeigt.

Der Scheitel des Mondschattens fällt meistentheils noch über die Erdoberfläche; nur zuweilen reicht er auf diese, noch seltner aber bis unter dieselbe, wobey jedoch seine Dicke höchstens einige 30 Meilen betragen kann. Daraus sieht man ein, warum totale, noch mehr central-totale und vollkommen ringförmige Sonnenfinsternisse für einen und denselben Ort sehr selten seyn müs-

sen; so wie sich überhaupt Sonnenfinsterniſſe viel seltner, als Mondsfinsterniße, für denselben Ort zutragen. So fielen von 1755 — 64 incl. nur vier zu Paris sichtbare Sonnenfinsterniße, aber 11 Mondsfinsterniſſe vor, und der Graf du Vaucel berechnete, daß in 132 Jahren (nämlich bis 1900) nur 59 Sonnenfinsterniſſe für Paris sich ereignen werden, unter welchen nicht eine einzige totale, sondern blos eine ringförmige (den 9t. Oct. 1847) seyn werde. Die letzte totale Sonnenfinsterniß für Paris war 1724 den 22ten May, wo die Sonne auf $2'\frac{3}{4}$ so verfinstert wurde, daß man Venus und Merkur mit unbewaffnetem Auge sehen konnte. Solche Finsterniſſe haben überhaupt etwas sehr Frappantes und Schauerliches.

An und für sich fallen jedoch mehrere Sonnenfinsterniſſe vor, als Mondsfinsterniſſe. Denn diese werden schon unmöglich, wenn der Mond über 12° von seinem nächsten Knoten zur Zeit seiner Opposition mit der Sonne entfernt ist; jene aber erfolgen noch wahrscheinlich oder gewiß, wenn der Mond in seiner Conjunktion mit der Sonne 21° — 15° vom Knoten entfernt ist. Jedes Jahr müssen daher wenigstens 2 Sonnenfinsterniſſe eintreffen, weil die Sonne nach 6 Monaten wieder in die Nähe der Mondsknoten kömmt. Aber die Anzahl der Finsterniſſe zusammen kann die Zahl 7 nicht übersteigen. Diese Anzahl hatte im J. 1805 statt, wo 5 Sonnen- und 2 Mondsfinsterniſſe vorfielen.

Die

Die Beobachtung einer Sonnenfinsterniß besteht darin, daß man an einer astronomischen Uhr den Augenblick des Anfanges und Endes derselben genau bemerkt; von Zeit zu Zeit die Größe des verfinsterten Theiles, welche, wie beym Monde, in Zollen und Minuten angegeben wird, mißt, und überhaupt den scheinbaren Weeg der Mondsscheibe durch die Sonne so genau, als möglich, zu bestimmen sucht. Weil sich hiebey der dunkle Mondrand auf dem hellen Sonnenteller sehr deutlich und wohlbegrenzt zeigt; so sind diese Beobachtungen weit zuverläßiger und höher zu schätzen, als jene der Mondsfinsternisse.

Perioden der Finsternisse.

§. 24. 1. Nach einer jeden Finsterniß von ziemlicher Größe fällt im nächsten Jahre 11 Tage früher wieder eine vor. Denn um soviel treffen die Syzygien im folgenden Jahre früher ein, indem 12 Mondsmonate nur 354 T. machen. Daher fällt der 13te Neu- oder Vollmond ungefehr 11° weit von der Gegend des Thierkreises, in welcher der Knoten, in oder nahe welchem eine Finsterniß war, im vorhergehenden Jahre stand. Nun gehen die Mondsknoten jährlich um 19° (§. 19.) zurücke; mithin ist der Knoten im folgenden Jahre über die vorerwähnten 11° noch 8° zurücke, und die Syzygie ist jetzt 8° vom Knoten, wenn sie im vorigen Jahre in ihm selbst war. Daher wird die nun vorfallende Finsterniß kleiner. Aber für das zweyte folgende Jahr beträgt jene Entfernung vom Knoten schon 16°, al-

so ist keine Monds- aber wohl eine Sonnenfinsterniß möglich.

2. Sehr merkwürdig ist die nach Ptolomäus Zeugnisse schon den Chaldäern unter dem Namen Saros bekannt gewesene Halley'ische oder Plinianische Periode der Rückkehr der Finsternisse von 223 Mondmonaten = 6585 $\frac{1}{3}$ T. = 18 J. 11 T. (oder 10 T., wenn in den 18 Jahren 5 Schaltjahre vorfallen) und 8 St. Plinius (hist. nat. II. 13.) sagt: „defectus Solis et lunae ducentis viginti tribus mensibus redire in suos orbes, certum est". In dieser Zeit sind die Mondsknoten etwa um 349° 20′ zurückegewichen, also noch 10° 40′ vorwärts von ihrer Stelle im Anfange der Periode entfernt. Die Sonne aber hat 18 Umläufe vollendet, und in den 10 Tagen noch etwa 10° 40′ vorwärts zurückegelegt; sie steht demnach gegen den gleichweit fortgerückten Mondsknoten fast eben so, wie im Anfange der Periode. Da nun auch der Mond, der 223 Mondwechsel vollendet hat, mit der Sonne und dem Mondsknoten wieder dieselbe Stellung hat, wie im Anfange der Periode; so muß, wenn zu dieser Zeit eine Finsterniß war, auch am Ende der Periode wieder eine eintreffen. Halley sagte vermittelst dieses Zeitraumes, weil am 22ten Jul. 1666 eine Sonnenfinsterniß beobachtet war, die am 2ten Jul. 1684 erfolgte voraus. Nach einer beträchtlichen Finsterniß aber werden die nächsten nach 18 J. immer kleiner, bis sie endlich ganz ausbleiben.

3. Eben dieses leisten die Perioden von 716, 3087, 6890, 9977 . . . Mondsmonaten, und zwar jede folgende immer genauer, als die vorhergehenden.

Occultationen.

§. 25. Wir sehen zuweilen, daß die Planeten sowohl, als einige Fixsterne erster und zweyter Größe im Thierkreise auf einige Zeit verschwinden, indem der östliche Mondsrand an sie tritt, dann aber wieder am westlichen Rande zum Vorschein kommen. Diese Erscheinung heißt Occultation, Bedeckung, wohin auch die Sonnenfinsterniß gehört.

Je größer der Fixstern, und je kleiner der erleuchtete Theil des Mondes ist, desto deutlicher bemerkt man jene Bedeckungen, welche man mit Fernröhren zu beobachten pflegt, ob man gleich schon mit blosem Auge den Ein- und Austritt der Planeten und der größeren Fixsterne bemerken kann. Diese an verschiedenen Oertern der Erde angestellten Beobachtungen dienen den Astronomen vorzüglich zu genaueren Bestimmungen des Mondlaufes und der geographischen Lage jener Oerter.

Jupiters Finsternisse, und Verfinsterung seiner Trabanten.

§. 26. Gehen die Trabanten des Jupiters zwischen ihm und der Sonne durch, wie Fig. 25. der Trabant c, so, daß er, vom Jupiter in A aus betrachtet, mit der Sonne in Conjunktion erscheint; so können sie auf ihn ihren Schatten werfen, und Sonnenfinsternisse auf

ihm

ihm verursachen, wobey wir auf der Erde die Schatten der Trabanten als dunkle runde Scheiben über die Scheibe des Jupiters rücken sehen. Kommen aber diese Monde selbst bey ihrem beständigen Umlaufe um den Hauptplaneten in dessen Schatten; so entstehen ihre Verfinsterungen. Dasselbe gilt in Ansehung der andern Hauptplaneten und ihrer Trabanten. Allein nur die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten lassen sich leicht und mit Sicherheit beobachten.

Sind nämlich die Monde des Jupiters, von diesem aus betrachtet, in Opposition mit der Sonne in E, und stehen sie gerade hinter dem Jupiter und der Sonne; so treten sie in jenes Schatten, und verlieren, wie der Trabant der Erde, ihr Licht. Auf dem Jupiter sieht man also eine Mondsfinsterniß. Die Immersion dieser Monde geschieht immer auf der Westseite, ihre Emersion auf der Ostseite des Jupiters, weil sie sich von Westen nach Osten um diesen bewegen. Wie diese Verfinsterungen, von der Erde aus betrachtet, erscheinen müssen, erhellt durch die Figur. Sehen wir von T aus den Jupiter mit der Sonne in Conjunktion in C, oder in Opposition in O; so wird uns in T jedesmal sein Schatten verdeckt, sohin können wir zu beyden Zeiten weder Ein- noch Austritt sehen. Aber in der Zeit zwischen der Conjunktion und Opposition, wo Jupiter des Morgens erscheint, z. B. in A, ist uns die Westseite seines Schattens zugekehrt, und zwar am stärksten, wenn er in B mit der Sonne in der Quadratur ist. In dieser

ser Zwischenzeit sehen wir daher blos die Eintritte. In der Zeit zwischen der Opposition und Conjunktion aber, wo Jupiter des Abends sichtbar ist, z. B. in D, ist uns die Ostseite des Schattens zugekehrt, und zwar am stärksten, wenn er wieder in der Quadratur in F um 6 Uhr Abends im Meridian steht. Demnach sehen wir in dieser Zwischenzeit blos die Austritte. Diese Regeln gelten allgemein für die 2 ersten Trabanten; bey den 2 andern findet eine Ausnahme statt, indem wir zuweilen, besonders zur Zeit der Quadratur, sowohl ihre Ein- als Austritte sehen können.

Zugleich erhellt, daß Jupiter, auch der gestreifte (planeta striatus) genannt (weil man um ihn viele Streifen von veränderlicher Gestalt, Größe und Beweglichkeit sieht, welche Streifen man für atmosphärische, vom Winde zuweilen stark getriebene Wolken zu halten hat), und seine Monde an und für sich dunkle Körper seyen. Eben so schließt man dieß von Saturn und Uranus.

Nutzen der Beobachtungen der Finsternisse.

§. 27. Da die Verfinsterungen des Mondes sowohl, als der Jupiters Trabanten wirkliche Lichtberaubungen sind, folglich allen Bewohnern der Erde, bey denen sie sichtbar sind, zu einerley Zeitaugenblick, und auf einerley Weise gesehen werden; da aber richtig gestellte Uhren an verschiedenen Oertern der Erde für denselben Augenblick der Beobachtung verschiedene Stunden zeigen; so

lernen wir aus jenen Beobachtungen diese Unterscheide der Zeit für einerley Zeitaugenblick kennen, oder wissen, um wieviel später oder früher an dem einem Orte Mittag ist, als an dem andern. Diesen Unterschied der Zeit nennt man den Unterschied der Meridiane, wodurch die geographische Länge der Oerter sowohl gegen einander, als auch ihre absolute Länge bestimmt wird. Hiezu dienen besonders die Verfinsterungen der Jupitersmonde, weil sie nicht nur häufig vorfallen, sondern auch ihr Ein- und Austritt weit genauer beobachtet werden kann, als die bey Mondsfinsternissen. Vorzügliche Sicherheit zu gleichem Ziele gewähren auch die Occultationen. Nur fordern diese noch weitläufige Berechnungen, um die Zeit der wahren Conjunktion zu finden, oder die an beyden Orten beobachtete scheinbare Berührung des Sonnen- und Mondsrandes auf eine wahre, oder aus dem Mittelpunkte der Erde gesehene zu reduziren. Denn aus dieser läßt sich dann erst der Unterschied der Länge schließen.

Den Beobachtungen der Verfinsterungen der Jupiters-Trabanten haben wir die von Olof Römer, einem Dänen, zuerst 1675 gemachte, und durch die von Bradley 1725 entdeckte Aberration der Fixsterne (wovon unten die Rede seyn wird) bestättigte Entdeckung der Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Lichtes zu verdanken. Man hatte nämlich jene Verfinsterungen mehrere Jahre lang genau berechnet und beobachtet; nun fand man, daß, wenn Jupiter in Conjunktion mit

der

Vorstellung des Sonnesystems.

A. Der Sonne und der Hauptplaneten.

	Tropische Umlaufszeit §. 41.	Siderische Umlaufszeit.	Synodische Umlaufszeit.	Neigung zur Ecliptik oder Erdbahn. §§. 19. 43.	Neigung des Aequators der Planeten zu ihrer Bahn §. 17.	Umwälzungszeit §. 17.	Beobachtete Durchmesser. §. 16.	Reducirte scheinb. Durchm. §. 16.	Wahrer Durchmesser in geograph. Meilen.	Verhältniß zum Erddurchmesser.	Körperlicher Inhalt.	Dichtigkeit. §. 66.	Masse. §. 66.	Fallgeschwindigkeit auf ihrer Oberfläche.	Grösster Abstand v. d. Sonne, die mittlere Weite der Erde v. d. Sonne = 1 gesetzt.	Mittlere Weite — zugleich in Mill. Meilen überhaupt.	Kleinste Weite	Eccentricität, die halbe Apsidenlinie = 1 gesetzt.
Sonne ☉	— — —	— — —	— — —	— —	7° 30′	St. 25 14 8′		31′ 57″, 0	194491	112,79	1434957	0, 2548	3, 51886	Par. F. in 1″ 427, 88	— —	Die Weite d. ☉ v. d. ☿ 20851500	— —	— —
Merkur ☿	J. T. St. M. S. 0 87 23 14 32, 7	J. T. St. M. S. 0 87 23 15 43, 6	T. St. M. S. 115 21 3 34	7° 0′ 0″		St. 24 5′ 30″	12″	6, 9	697	0,41	0,068	2, 583	0, 17	15, 654	0,46670	0, 38710 8 Mill. Meil.	0, 30750	0, 20563
Venus ♀	0 224 16 41 25,84	0 224 16 49 7,98	583 22 7 6	3 23 28	75°	23 21	57	16, 55	1688	0, 97	0, 912	1, 0379	0, 95	15, 421	0, 72843	0, 72843 15	0, 71318	0, 00706
Erde ♁	1 0 5 48 48, 0	1 0 6 9 8, 0	— — —	— —	23° 28′	23 56 4		17, 2	1719	1, 00	1, 000	1, 00..	1, 00..	15, 1037	1, 01680	1, 0... 21	0, 98320	0, 016853
Mars ♂	1 321 22 18 27, 4	1 321 23 30 35, 6	779 22 28 37	1 51 0	0 beynahe	24 40	27	8, 943	1646	0, 67	0, 301	0, 656	0, 1025	5, 154	1, 66587	1, 52369 31	1, 38151	0, 09331
Vesta ⚶ entd. v. D. Olbers 1807.	3 124 23 8	3 125 3 28		7 8 10,7			0, 488		119	0, 007	0, 0000003					2, 35536 49		0, 078
Juno ⚵ entd. v. Harding 1805.	4 128 7 32			13 34 38			3, 057	1, 7	309	0, 18	0, 006					2, 657 55		0, 254236
Pallas ⚴ entd. v. D. Olbers 1802.	4 219 10 51			14 37 45			4, 504		455	0, 26	0, 017				3, 011	2, 765443 57		0, 246101
Ceres ⚳ entd. v. Piazzi 1801.	4 220 19 41			10 37 45			3, 482		352	0, 20	0, 009				2, 786	2, 766944 58		0, 0784757
Jupiter ♃	11 315 14 39 2, 0	11 317 14 27 10, 8	398 19 12 54	1 19 2	3° 12′	9 56	40	3 6, 82	19566	11, 39	1477, 648	0, 258	330, 60	42, 344	5, 45375	5, 20098 106	4, 94821	0, 048
Saturn ♄	29 161 19 16 15, 5	29 174 1 51 11, 2	378 2 12 38	2 29 55		10 16 4	18	2 51, 71	17362	10, 10	1030, 00	0, 1042	103, 69	15, 714	10, 084	9, 540 199	8, 996	0, 056
Uranus ♅ entd. v. Herschel 1781.	83 294 8 39	84 29 0 29	369 16 35 53	0 46 26			4	1 14, 52	7528	4, 38	83, 00	0, 2204	17, 74	14, 373	19, 874	19, 000 400	18, 126	0, 046

B. Der Nebenplaneten.

a. Der Mond braucht zu seinem tropischen Umlauf — T. 27 St. 7 43′ 4″, 7
— — sideral — — 27 7 43 11, 5
— — synodischen — — 29 12 44 3
zur Axendrehung 27 7 43 4, 7

Mondes Durchmesser 0,2730 des Erddurchm. = 1.
— Dichtigkeit 0,68706 } die der Erde = 1 gesetzt
— Masse 0,014 }
— Schwere auf seiner Oberfläche 2,83.

Des Mondes mittlere Entfernung von ♁ = 60 Erdhalbmesser, deren jeder = 1400 alt franz. Meilen beynahe, = 859½ teutsche Meilen genau.

b. Jupiterstrabanten.

	Period. Umlaufszeiten.	Größte Weite vom ♃		in Meilen überhaupt.	Diese Abstände erscheinen unter den Winkeln.
I	1 T. 18 St. 27′ 33″	5,965	Wobey die ♁ im	58000	1′ 51″
II	3 13 13 42	9,494	mittl. Abst. v. ♃	92000	2 57
III	7 3 42 33	15,141	und der Halbm.	146000	4 42
IV	16 16 32 8	26,630	des ♃ = 1.	200000	8 16

c. Uranustrabanten.

	Periodische Umlaufszeit.	Scheinbarer Abstand vom ♄
I	5 T. 21 St. 25′	0, 25″, 5
II	8 17 1	0 33, 0
III	10 23 4	0 38, 57
IV	13 11 5	0 44, 2
V	38 1 49	1 28, 4
VI	107 16 40	2 56, 8

c. Saturnstrabanten.

Ordnung d. Trabanten ehemals	jetzt	Periodische Umlaufszeiten.	Abstände vom ♄	in Meilen überhaupt.	Scheinbare Abstände.
		T. St.			
	I	0 23 45′ 4	2,80 Halbm.	27880	0′ 27″ bey
	II	1 8 50	3,63 des ♄	33320	0 35 mittlerer
I	III	1 21 18 27″	4,50	42900	0 43,5 Weite d. ♁
II	IV	2 17 44 2	5,80	51480	0 56 vom ♄
III	V	4 12 25 12	8,09	77220	1 18
IV	VI	15 22 34 38	8,67	171600	3 0
V	VII	79 7 47 0	54,20	506000	8 42,5

der Sonne, also um die doppelte Weite der Sonne von der Erde, d. i. 41 Millionen Meilen mit seinen Trabanten weiter von uns entfernt war, die Ein- und Austritte bey jenen Finsternissen immer um 16′ 15″ später eintrafen, als wenn er mit der Sonne in Opposition in O stand. Hieraus folgerte man, daß das Licht zur Durchlaufung dieses Weeges 16′ 15″, mithin von der Sonne zur Erde durch einen Raum von 20½ Mill. Meilen 8′ 7″½ Zeit brauche; daß sich folglich das Licht mit einer solchen ausserordentlichen Geschwindigkeit fortpflanze, daß es in jeder Zeitsekunde 41000 Meilen zurückelege, sich demnach 900000 schneller bewege, als der Schall, welcher in 1″ etwa 1038 Par. Fuß, oder erst in 22″ eine Meile zurückelegt.

Zweyter Abschnitt.

Von den Welt- oder Sonnensystemen.

A.

Das System des Ptolomäus.

§. 28. Die alten Philosophen, wenig bekannt mit den Umständen der Bewegung der Planeten, und daher der Mittel beraubt, die wahre Lage ihrer Bahnen deutlich einzusehen, mußten leicht geneigt seyn, den Schein für Wirklichkeit zu nehmen. Pythagoras behauptete

die

die Unbeweglichkeit der Erde im Mittelpunkte der Welt. Mehrere seiner Schüler machten die Sonne zu diesem Punkte, und die Erde zum Planeten. Der Pythagoräer Philolaus von Crotona, der ums Jahr 450 vor C. G. lebte, soll zuerst die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne, und bald nachher Nicetas aus Syrakus die Umwälzung der Erde um ihre Axe gelehrt haben. Durch Plato lebte Pythagoras Meinung wieder auf; ihm folgten mehrere, besonders aber vertheidigte Ptolomäus, der gegen das erste Jahr des Kayfers Antonin, etwa 140 J. v. C. G. schrieb, dieses System in seinem Almagest, dem einzigen vollständigen alten Werke über Astronomie.

Nach Ptolomäus Anordnung des Weltgebäudes ist die unbewegliche Erde der Mittelpunkt der Sonnen- und Planetenbahnen, mit der Region der Luft und des Feuers umgeben. Die 26te Figur stellt dieses System deutlich vor. Ueber die Art, wie die Bewegung in diesen Bahnen vor sich gehe, drückten sich die meisten alten Philosophen sonderbar aus. Das ganze Weltgebäude nannten sie eine feste krystaliene Kugel, gleich einer Zwiebel, aus 8 Schichten bestehend, welche, genau aneinander schliesend, sich doch noch aneinander fortschieben liessen. Diese Schichten waren ihnen krystallene Sphären, an welchen sie die Planeten befestigt glaubten. Als 8te Sphäre über Saturn nannten sie das Firmament mit den Fixsternen. Um die beständige Aenderung der Länge der Fixsterne und der Schiefe der Ecliptik zu erklären,

klären, mußten sie bald noch eine 9te und 10te Sphäre annehmen. Zur Erklärung der Bewegung des Ganzen statuirten sie eine 11te Sphäre, als primum mobile, wodurch alle übrigen täglich von Osten nach Westen herumgetrieben würden, während jede Planetensphäre sich in entgegengesetzter Bewegung um eine bestimmte Größe an der anderen fortschiebe.

B.

Das System der Aegyptier.

§. 29. Die ersten Beobachter hatten sicher bemerkt, daß die Venus sich niemals von der Sonne weiter als 45° bis 48°, und Merkur nie weiter als 18 — 28° entferne. Nun war es sehr natürlich, zu glauben, daß, liefen beyde Planeten, wie die Sonne, um die Erde, sie auch bisweilen der Sonne gerade gegenüber, folglich 180° von ihr entfernt erscheinen müßten, wo z. B. die Sonne in *m*, Venus aber in *n* erschiene. Die alten Aegyptier ließen also, zur Erklärung der steten Nachbarschaft dieser 2 Planeten und der Sonne und des veränderlichen Lichtglanzes der erstern, diese Planeten in Epicykeln um die Sonne laufen. Diesem Systeme, durch die 27te Figur vorgestellt, folgten Vitruv und Martianus Capella, ausdrücklich behauptend, daß die Erde nicht aller Planeten Mittelpunkt sey, sondern die Venus- und Merkurbahn die Sonne zum Centrum habe, woraus sie dieser Planeten scheinbare Stillstände und

Rück-

Rückgänge erklärten. Für Copernicus konnte dieses System gleichsam Lichtstral seyn.

C.

System des Copernicus.

§. 30. Um auch die Ungleichheiten in der Bewegung der weiter von der Sonne entfernten Planeten zu erklären, setzten die alten Astronomen den Planeten eigene kleinere Kreise, Epicykeln, an, in welchen sie sich zugleich einmal bewegen, oder den synodischen Umlauf vollenden sollten, während sie ihren periodischen Umlauf in ihren Bahnen vollendeten. Ließ sich mit einem dieser Epicykeln für einen Planeten dessen unordentlich scheinender Lauf noch nicht ganz berichtigen; so setzten sie am Umkreise des vorigen Epicykels den Mittelpunkt eines neuen u. s. w.

Nicolaus Copernicus (ein Dommherr zu Frauenberg in Preußen, zu Thorn d. 19ten Febr. 1473 geb., gest. 1543 den 24ten May) mit diesen komplizirten, auf zum Theil äußerst willkührlichen und zum Theil widernatürlichen Hypothesen beruhenden Systemen ganz vertraut, und getreu dem wahren Grundsatze einer gesunden Naturphilosophie „Natura nihil agit fruſtra, et fruſtra fit per plura, quid fieri poteſt per pauciora. Natura enim ſimplex eſt, et rerum cauſis Superfluis non luxuriat. Ideoque effectuum naturalium ejusdem generis eaedem ſunt

cau-

causae“ entwarf in seinem Werke „de revolutionibus orbium coelestium lib. VI. 1543. Norimbergae“ ein ganz einfaches Sonnensystem, an welchem er 36 Jahre gearbeitet hatte. Die 28te Figur stellt dasselbe klar vor. Die Sonne ist der Mittelpunkt, um welchen sich zunächst Merkur, Venus, dann die Erde u. s. w. bewegt. Nach diesem Systeme bewegt sich demnach nicht die Sonne in der Ecliptik, sondern in deren Ebene die Erde von Osten nach Westen mit beständigem Parallelismus ihrer Axe; die scheinbare Sonnenbahn ist also die wahre Erdbahn. Die scheinbare tägliche Bewegung des ganzen Fixstern-Himmels entsteht aus der täglichen Umwälzung der Erde um ihre Axe von Westen nach Osten.

Das Wissenswürdigste aus Copernicus Leben enthält Kästner's Geschichte der Mathem. 2ter Band. Eben da findet man eine kurze Biographie des Erfinders des folgenden Systems, welcher Kästner Gassendi's vita Tychonis zum Grunde legte.

D.

Tychonisches System.

§. 31. Des Copernicus Werk, sagt Kästner, ward von Kennern mit großem Beyfalle aufgenommen; Unverständige wunderten sich freylich über den närrischen Einfall, daß die Erde sich bewege, und Bigote, hätte er hinzusetzen können, schmähten es. So heißt

es

es in den Opusc. Mathem. des gelehrten Mathematikers Maurolyco, welche 2 Jahre vor dessen Tode 1572 zu Venedig herauskamen: „toleratur et Nicolaus Copernicus, qui solem fixum et terram in gyrum circumverti posuit; et scutica potius aut flagello, quam reprehensione dignus est.“ Zu keiner dieser letzten Klassen von Menschen gehörte Tycho von Brahé (ein dänischer Edelmann, geb. d. 13. Dec. 1546 zu Knudstorff in Schonen, gest. d. 24. Oct. 1601). Dieser berühmte, von seinem Vaterlande sehr mit Undank gelohnte, Astronom wich aus zum Theil äußerst unwichtigen Gründen vom Systeme des Copernicus darin ab, daß er behauptete, die Erde stehe im Mittelpunkte der Welt unbeweglich, um sie laufe die Sonne täglich mit allen Himmelskörpern. Hingegen gab er zu, daß sich die 5 übrigen damals bekannten Planeten um die Sonne, wie der Mond um die Erde, bewegten. Dieses System sieht man in der 29ten Figur dargestellt.

Sehr interessant ist die „Lebensbeschreibung des berühmten und gelehrten Dänischen Sternsehers Tycho von Brahe's — aus der dänischen Sprache in die teutsche übersetzt von Philander von der Westritz — in 2 Theilen 1756. S. 239 des 1t. Th. findet man einen Brief Tycho's ad Casparum Peucerum, Wittenbergensem olim Professorem primarium, worin er die Gründe anführt, warum er von Copernicus Systeme abwiche.

Nach-

Nachdem er diesem einen Vorzug vor dem Ptolomäischen Systeme eingeräumt hat, sagt er: „Tamen cum jam regularem, perfectum minusque intrica um motum, terrae pigro et ignobiliori corpori tribueret, non parum suspecta reddebatur haec assumptio, praesertim cum sacrae Literae non paucis in locis illi aperte reclamitent“. Und da Tycho's, am Mars angestellten, Beobachtungen mit dem Copernikanischen Systeme stimmten, und er daher größeres Zutrauen zu diesem geschöpft zu haben, bekennt, sagt er: „Obstabat nihilominus plurimum circa terrae revolutionem tam ordinariam tam perpetuam nimia absurditas, et sacrarum insuper literarum contrarium astruentium irrefragabilis authoritas.“

Gründe für die Axendrehung der Erde.

§. 32. Diese letzte, wie die zwey ersten Weltanordnungen haben in Beziehung auf die tägliche Himmelsumwälzung nichts für sich, als den Schein. Da aber phoronomisch es eins ist, ob der Himmel sich täglich um die ruhende Erde, oder sich diese in entgegengesetzter Richtung um ihre Axe bewegt, indeß jener in Ruhe bleibt; so kann der Schein nichts entscheiden. Allein die Annahme der täglichen Himmelsrevolution hat 1. die Undenkbarkeit der ungeheuren Geschwindigkeit, mit welcher diese Bewegung geschehen müßte, wider sich. Denn der Durchmesser der Sonnenbahn beträgt gegen 42, ihr Umfang gegen 132 Millionen

Meilen. Um daher in 24 Stunden um die Erde herum zu kommen, müßte die Sonne stündlich einen Weeg von $5\frac{1}{2}$ Mill. M. zurückelegen. Nun sind Jupiter, Saturn, Uranus noch viel weiter von uns entfernt, als die Sonne, aber noch ungleich weiter, als jene, steht das unzählige Fixsternenheer von uns ab. Demnach würden diese Himmelskörper nur die ungeheuerste Geschwindigkeit haben müssen, wenn sie um die Erde laufen sollten. Denkt man sich 2. die Größe dieser Körper hinzu, in deren Vergleich die Erde zum Punkte verschwindet; so ist es nicht denkbar, daß so viele, so große Weltkörper die Bestimmung haben sollten, sich mit der ungeheuersten Geschwindigkeit täglich um diesen Punkt im Weltall zu bewegen.

Es ist daher schon an und für sich vernünftiger, die Axendrehung der Erde anzunehmen. Diese Annahme hat überdieß noch direkte Gründe für sich: a. die Analogie der Erde mit den übrigen Planeten, welche sich alle von Westen nach Osten um ihre Axe drehen, und dadurch Auf- und Untergang der Sonne haben, wie wir. b. Wir wissen aus den Pendulversuchen gewiß, daß die Schwere unter dem Erdäquator am geringsten sey, und von da gegen die Pole zu immer mehr wachse. Ferner aus denselben Versuchen, wie aus den wirklichen Gradmessungen auf der Erde wissen wir, daß die Erde am Aequatpr erhaben, und gegen die Pole eingedrückt sey. *)

Wäre

*) Sollte man nicht aus derselben einfachen Ursache, warum das Pendul, vom Einflusse der Wärme unabhängig, am Aequa-

Wäre nun keine der Schwere entgegenwürkende Kraft vorhanden; so müßten die Erdkörper überal mit gleicher Geschwindigkeit gegen den Mittelpunkt der Erde getrieben werden. Allein dem widerspricht die Erfahrung. Also muß eine der Schwere nach Verhältniß der Annä-

Aequator langsamer schwingt, als in den Polargegenden, auch die, besonders durch H. v. Humbold constatirte, Erscheinung erklären, daß nämlich der mittlere Barometerstand am Aequator beynahe um 1 Linie niedriger ist, als in dem Parallel von 40 — 50°, und so immer mehr gegen die Pole zu wächst? H. v. Lindenau erklärt (in der mon. Corresp. März. 1810.) diese Erscheinung so: Wegen der Dilatation der Luft durch die Wärme wird die Höhe der Luft am Aequator die größte, am Pol die kleinste seyn. Zwey Luftsäulen aber von gleicher absoluter Dichtigkeit gravitiren im Verhältniße ihrer Schwere; nun ist aber die Schwere im Verhältniß des Quadrats der Entfernungen vom Centro der Erde, und wird also für eine höhere Luftsäule geringer seyn, als für die niedern. Also wird auch die Gravitation zweyer Luftsäulen von gleicher absoluter Dichtigkeit auf das Barometer im Verhältniß ihrer Höhe seyn, so, daß allemal die Wirkung oder der Barometerstand, welcher der höchsten Luftsäule entspricht, der kleinere seyn wird. — Allein homogene Flüßigkeiten drücken im Verhältnisse ihrer Höhen. Es würde daher die durch Dilatation der Luftsäulen am Aequator hervorgebrachte geringere Densität in Ansehung des Druckes durch ihre vermehrte Höhe compensirt werden, daher der Druck der Luftsäulen am Aequator eben so stark, als der an den Polen seyn können. Ich glaube daher, daß die Hauptsache der Erklärung dieser Erscheinung hauptsächlich in der Gestalt der Erde gesucht werden müsse, wo dann freylich das Gesetz der Abnahme der Schwere mit zur Erklärung gezogen wird.

herung zum Aequator entgegen wirkende Kraft existiren. Diese Kraft ist aber die der Centripetalkraft entgegengesetzte Schwungkraft, welche mit der Größe der Kreise, in welchen die Körper schwingen, zunimmt, so daß die Körper unter dem Aequator, als einem größten Kreise, das größte, die unter den Polen beständig das kleinste Bestreben haben, sich von der Erde zu entfernen. Aber diese Schwungkraft ist ohne Axendrehung der Erde undenkbar.

Aus derselben Kraft ist auch die Abplattung der Erde zu erklären. Vermöge dieser Gestalt steht die Oberfläche des Weltmeers unter der Aequator $2\frac{1}{2}$ Meile höher,

Weit schwieriger ist die Erklärung der in den Tropenländern beobachteten täglichen Schwankungen des Barometers, welche die folgende Tafel darstellt; v. Lindenau glaubt die Ursache dieses Phönomens, rücksichtlich dessen v. Humbold sagt: rien ne paroit la (marche du Mercure) determiner, que le temps vrai ou la position du soleil" in einer Combination der täglichen und jährlichen Bewegung der Erde zu finden.

	Stunde	Barom.	Stunde	Barom.
Mittag	0	338, 02	13	337, 80
	1	337, 79	14	..., 69
	2	337, 58	15	..., 62
	3	..., 45	16	..., 60
	4	..., 40	17	337, 68
	5	337, 41	18	..., 79
	6	..., 45	19	..., 94
	7	..., 53	20	338, 16
	8	..., 69	21	338, 30
	9	..., 83	22	338, 28
	10	..., 88	23	..., 21
	11	..., 91	24	..., 02
	12	337, 88		

höher, d. i. von dem Erdmittelpunkte weiter ab, als unter den Polen. Würde nun das die Erdkugel umgebende Weltmeer mit der Ruhe der Erde stille stehen; so würde das höher stehende Wasser nach hydrostatischen Gesetzen sich mit dem niedriger stehenden ins Gleichgewicht setzen müssen, sohin so lange abfließen, bis es mit dem übrigen eine Libell bildete, oder mit dem Wasser an den Polen gleichen Abstand vom Mittelpunkte der Erde hätte. Da dieses nun nicht geschieht; so muß es eine der Schwere so entgegenwirkende Kraft geben, welche das Wasser am Aequator immer aufgethürmt, und mit der Annäherung zum Aequator immer verhältnißmäßig höher erhält, d. i. es muß eine Axendrehung der Erde geben.

Sollten die neueren Versuche mit von großen Höhen frey fallenden Körpern, wobey es sich zeigte, daß diese etwas vom Perpendikel gegen Osten abwichen, vollkommen bestättigt, und außer Zweifel gesetzt werden; so wäre die Axendrehung der Erde sogar durch unmittelbare Erfahrung bewiesen.

Zusatz. Aus unmittelbaren Beobachtungen mittelst guter Teleskope weiß man, daß auch die Planeten Mars, Jupiter, Saturn und Uranus die Sphäroidengestalt haben. So giebt Herschel den Durchmesser des Mars-Aequators um $\frac{1}{16}$ größer, als seine Axe an; setzt daher seine Abplattung wie 15: 16. Schröter aber und Köhler fanden dieselbe nur 80: 81. Die sehr starke Abplattung des Jupiters wird 13: 14 gesetzt, die vom Saturn 9: 10; auch den Uranus sah

Her-

Herschel 1795 den 21. April als eine Ellipse. Aus dieser, durch die Axendrehung nothwendig erfolgten, Sphäroidengestalt der Planeten kann man auch, wie es bey der Erde statt findet, auf die Verschiedenheit der Schwere auf jenen Weltkörpern schließen. Genaue Beobachtungen lehren ferner, daß Merkur und Venus sehr gebirgigte Körper seyen, und daß sich ihre höchsten Gebirge eben so, wie auf unserer Erde, der Sonne und dem Monde, auf ihrer südlichen Halbkugel befinden. Es ist also eine durchgängige Analogie unserer Erde mit den übrigen Planeten höchst wahrscheinlich.

Erklärung des Wechsels der vier Jahrszeiten und des scheinbaren Laufes der Sonne in der Ecliptik.

§. 33. Die eben so leichte, als natürliche Erklärung aller Erscheinungen in unserem Planetensysteme nach Copernicus Ansicht müßte schon allein hinlänglicher Bürge für die Richtigkeit letzterer seyn, wenn uns auch die physische Astronomie keine weitere unwiderlegbare Gründe an die Hand gäbe. Wir beschränken uns hier auf die Erklärung der merkwürdigsten jener Erscheinungen.

Die 30te Figur stellt die in der Ebene der Ecliptik um die Sonne in S von Osten nach Westen so bewegte Erde vor, daß ihre Axe Ns sich immer parallel bleibt, oder sich mit der Ebene der Erdbahn beständig unter einem Winkel von $66° \frac{1}{2}$ schneidet. Gleichwie nämlich der Himmelsäquator nichts anders ist, als die bis an

den

den Himmel verlängerte Ebene des Erdäquators, so ist auch die Ecliptik nichts anders, als die bis zu den Fixsternen verlängerte Ebene der Erdbahn. Daher ist die Schiefe der Ecliptik, oder ihre Neigung gegen den Himmelsäquator nichts anders, als die Neigung der Ebene der Erdbahn gegen die Ebene des Erdäquators oder der Winkel, den die Richtung, nach welcher die Erde um die Sonne läuft, mit derjenigen Richtung macht, nach welcher sie sich um ihre Axe dreht; dieser Winkel beträgt daher $23° \frac{1}{2}$, mithin ist die Erdaxe gegen die Fläche der Erdbahn um einen Winkel von $66° \frac{1}{2}$, dem Complemente jenes Winkels, geneigt.

Ferner stellen or und nm den Steinbocks- und Krebswendekreis; aq den Aequator; th, di die beyden Polarkreise vor. Steht nun die Erde in ☉; so erscheint die Sonne in dem 180° entfernten oder entgegengesetzten Zeichen ♑; ihre Stralen So fallen senkrecht auf den Steinbockswendekreis or, den die Sonne dann zu beschreiben scheint. Es ist für die südlichen Länder Sommersanfang, für die nördlichen Wintersanfang gegen den 21ten December (Wintersolstitium — die längste Nacht, der kürzeste Tag —). In k liege Teutschland, dessen Zenith in z; so erhellt deutlich, daß uns die Sonne um diese Zeit weit vom Scheitelpunkte und tief gegen Süden hinunter erscheine. Die Länder zwischen dem nördlichen Polarkreise di haben zu eben dieser Zeit beständig Nacht, die zwischen dem südlichen t h beständig Tag, weil jene bey der Umdrehung der

Erde

Erde in der dunklen, und diese in der der Sonne zugewendeten oder erleuchteten Halbkugel liegen.

Kömmt nach 3 Monaten die Sonne in ♎; so erscheint sie im ♈, ihre Stralen fallen senkrecht auf den Aequator aq, welchen Kreis sie dann zu beschreiben scheint, folglich von beyden Erdpolen gleichweit entfernt ist. Diese werden demnach von der Sonne erleuchtet; die Meridiane, wie Nasq, werden nach und nach Erleuchtungsgrenzkreise, und bey einer einmaligen Umdrehung der Erde hat sie der Sonne ihre ganze Oberfläche zugekehrt, daher Tag und Nacht überal gleichlang; — man hat das Frühlingsäquinoctium und für die nördlichen Länder Anfang des Frühlinges (gegen den 21ten März) für die südlichen Herbstes Anfang.

Nach 3 Monaten gegen den 21ten Junius kömmt die Erdkugel in ♑; dann sehen wir die Sonne im ♋, ihre Stralen fallen senkrecht auf den Krebswendekreis mn, welchen sie dann zu beschreiben scheint; in den nördlichen Ländern geht dann der Sommer, in den südlichen der Winter an — Sommersolstitium, längster Tag, kürzeste Nacht —. Aus dem Winkel der Zenithlinie Zk (für Teutschland) mit Sm ist ersichtlich, daß uns zu jener Zeit die Sonne hoch am Himmel erscheinen müsse. Auch haben dann die Länder zwischen dem nördlichen Polarkreise id beständig Tag, die zwischen dem südlichen ht beständig Nacht.

Gegen den 23ten September steht die Erde in ♈, die Sonne erscheint uns in ♎; wirft dann abermals ihre Stralen senkrecht auf aq; die Meridiane werden wieder nach einander Erleuchtungsgrenzkreise, so, daß die ganze Erdoberfläche in 24 St. das Sonnenlicht genießt (die Figur stellt die Erde disseits der Sonne, daher ihre Nachtseite vor), und Tag und Nacht abermals gleich sind. Für die nördlichen Länder ist dann Herbstes Anfang, für die südlichen Anfang des Frühlinges — Herbstnachtgleiche —.

Der schon oben angeführte periodische Mondswechsel ist auch zugleich im Sinne dieses Systems erklärt, indem wir den Mond als Trabanten der Erde betrachteten.

Aberration der Fixsterne, oder Abirrung des Lichtes.

§. 34. Bradley machte zuerst 1725 die merkwürdige Entdeckung, daß jeder Fixstern jährlich eine kleine Ellipse abcd (Fig. 31.) beschreibe, deren große Axe ac von Osten nach Westen 40″ beträgt, die kleine bd aber von Norden nach Süden sich beständig zu 40″ verhält, wie der Sinus der Breite des Sternes zum Sin. tot. Diese Erscheinung, Abirrung des Lichtes, oder Aberration der Fixsterne genannt, ist zugleich ein deutlicher, direkter Beweis von der jährlichen Bewegung der Erde.

Denn würden wir bey ruhender Erde den Fixstern immer aus demselben Orte sehen; so würden wir ihn auch immer an denselben Himmelspunkt referiren müssen. Bewegt sich hingegen jährlich die Erde um die Sonne von Osten nach Westen; so ist jene scheinbare Bewegung der Fixsterne eine natürliche und nothwendige Folge hievon, wenn wir zugleich die Bewegung des Lichtes mit in Verbindung bringen.

Das Licht durchlauft den Weeg von S nach A, oder den Halbmesser der Erdbahn, in 8′ 8″ (§. 27.). Es ist aber SA = 206265 Sekunden im Bogen (s. T. S. 342.). Diesem Bogen der Erdbahn gleichen Weeg durchläuft also das Licht in jener Zeit. Die Erde geht aber in derselben Zeit nur durch einen Bogen von 20″ in ihrer Bahn, folglich läuft das Licht 10313mal schneller, als die Erde; oder es ist, wenn (Fig. 32.) CB diesen Weeg für den Lichtstral vom Fixstern E, FB den in derselben Zeit von der Erde durchlauffenen kleinen Bogen vorstellt, CB 10313 > FB. Kömmt nun die Erde von A nach B mit dem Beobachter; so trifft der Lichtstral CB dessen Aug, welches ihn folglich in dieser Richtung BC und zugleich in der Richtung BF, nach welcher es mit der Erde bewegt wird, zurückestößt. Dieser zurücke gestossene Lichtstral muß also durch die Diagonate BD gehen, folglich der Stern nach e referirt werden, oder um den Winkel EBe von seinem wahren Orte E gegen die Gegend fortgerückt erscheinen, nach welcher sich die Erde hin bewegt.

Für

Für den Fall also, wo der Lichtstral EB auf den Weeg BF der Erde senkrecht fällt, hat man CB: CD = r: tang. x, oder log. tang. x = 10 — log. 10313, woraus man e BE = 20″ findet, oder um so viel scheint uns der Ort des Fixsternes verschoben; was jedesmal geschieht, wenn er mit der Sonne in Opposition oder Conjunktion ist. Denn im erstern Falle ist die Richtung der sich fortbewegenden Erde die Tangente AG (Fig. 31.), auf welche der Lichtstral EA senkrecht ist; der Fixstern erscheint folglich 20″ ostwärts in a. Nach einem halben Jahre ist die Erde in C, und E in Conjunction mit der Sonne; der Lichtstral EC fällt wieder auf CI senkrecht, folglich sehen wir ihn in c, 20″ westwärts von seinem Orte; also muß uns dieser Fixstern binnen einem halben Jahre 40″ von a nach c von Osten nach Westen gerückt zu seyn scheinen.

Fällt aber der Lichtstral FB (Fig. 33.) schief auf BF; so wird der Winkel e BE = y, um welchen der Fixstern von seinem wahren Orte E abzuweichen scheint, kleiner als 20″. Nun ist CB: CD (= 1) = Sin. CDB (DBF): Sin. y; aber eBE < 20″, folglich kann man auch statt DBF den ganzen Winkel CBF setzen: daher Sin. $y = \frac{\text{Sin. CBF}}{10313}$; aber auch aus dem Vorigen ist tang. $x = \frac{r}{10313}$, folglich

Sin. y: tang. x = Sin. CBF: r,

oder, weil bey sehr kleinen Winkeln die Sinusse den

Tan-

Tangenten gleich sind, und jene sich wie die Winkel selbst verhalten, y: x = Sin. CBF: r; d. i. y: 20″ = Sin. CBF: Sin. tot. Es ist also, wenn der Fixstern weder in ☌, noch in ☍ ⊙ ist, jener Alberrationswinkel allemal kleiner als 20″, und hat der Weeg der Erde eine solche Richtung BF (Fig. 31.), daß der mit der Richtung des Strales EB von ihr gebildete Winkel EBF gleich ist der Breite des Fixsterns, oder seinem scheinbaren Abstande von der Ecliptik (was der Fall ist, wenn die Erde in B oder D, die Sonne S vom Fixsterne 90° entfernt ist, und dieser Abends oder Morgens culminirt); so ist klar, daß die Abirrung des Fixsterns von seinem wahren Orte nach Süden oder Norden sich zu 20″ verhalte, wie der Sin. seiner Breite, zum Sin. tot.

Wenn aber der Stern nicht in der von der Papierfläche vorgestellte Ebene der Ecliptik ABCD, wie wir bisher der Deutlichkeit wegen setzten, sondern unter oder über dieser Ebene z. B. in e um das Loth eE von ihr entfernt steht; so wird zwar, weil dann auch eA auf AG und eC auf CI senkrecht ist, wie vorhin, der Stern in dem halben Jahre von der Opposition zur Conjunktion mit der Sonne — von a nach c 40″ fortgerückt erscheinen. Steht aber die Erde in B oder D, wo es, wegen des Verschwindens des Halbmessers der Erdbahn gegen die Weite des Fixsterns, eben so viel ist, als stünde sie in D, und ihre Richtung wäre SC || BF, oder SA || DH, und der Lichtstral eS fällt auf die Richtung der Erde schief, nämlich auf SC unter dem schiefen W.

eSC

eSC und auf SA unter dem spitzen Nebenwinkel eSA, welcher der Breite des Sterns e gleich ist; so haben wir unseren obigen zweyten Fall nach Fig. 33. wieder. Also wird, wenn die Erde in B ist, der Stral von e nach der Richtung der Erde SC, und ist sie in D, nach der entgegengesetzten Richtung SA um eine Linie Eb oder Ed fortgerückt erscheinen, welche Linie sich zu 20″ verhält, wie der Sinus der Breite des Sternes zum Sinus totus; oder bd: 40″ d. i. die kleine Axe zur großen ac (= 40″), wie der Sinus jener Breite, zum Sin. tot.; oder, diesen = 1 gesetzt, die kleine Axe gleicht der großen (= 40″), in den Sin. der Breite multiplizirt.

Daher je größer die Breite eines Fixsterns, desto breiter die Ellipse, welche folglich für Sterne, die in den Polen der Ecliptik stehen, oder eine Breite von 90° haben, deren Sin. = Sin. tot., in einen vollkommnen Kreis übergeht, wo ac = bd. Je kleiner aber die Breite, desto schmäler die Ellipse, so, daß ein in der Ebene der Ecliptik selbst stehender Stern statt der Ellipse blos deren große Axe ac = 40″ das Jahr hindurch einmal von a nach c, von Osten nach Westen, das anderemal von c nach a beschreibt.

Es ist also die beobachtete Aberration der Fixsterne genau von der Größe und Beschaffenheit, wie es der Lauf der Erde um die Sonne in Verbindung mit der Fortpflanzung des Lichtes fordert. Daß übrigens durch diese Erscheinung die Länge, Breite, Rectascen-

sion

sion und Deklination der Fixsterne geändert werde, ist von selbst klar.

Erklärung der verschiedenen scheinbaren Größe, und des unordentlich scheinenden Laufes der Planeten.

§. 35. Die Ursache, warum Venus und Merkur, jene nie über 48°, dieser nie über 28°, sich von der Sonne entfernen, haben wir oben schon angedeutet; sie liegt darin, weil die Bahnen dieser Planeten von der Erdbahn eingeschlossen werden. Daher diese der Sonne näher stehenden Planeten auch die unteren, Mars aber mit den folgenden die oberen Planeten genannt werden. Weil ferner Merkur und Venus zuweilen jenseits, zuweilen disseits der Sonne stehen, in jenem Stande ihre größte Entfernung (was man die obere Conjunktion nennt), in diesem die kleinste Entfernung von der Erde (untere Conjunktion) haben; so wird ihre wechselnde scheinbare Größe begreiflich. Eben so können die oberen Planeten mit der Sonne an einem Orte des Himmels, wie z. B. Mars (Fig. 28.) in n, ein andersmal 180° von der Sonne entfernt oder in m erscheinen (welche Entfernung man den Gegenschein ☍ nennt); folglich in jenem Stande ihre größte Weite von der Erde haben, in diesem Stande aber der Erde viel näher kommen; weßwegen auch ihre scheinbare Größe veränderlich seyn muß.

Wenn ferner (Fig. 34.) in S die Sonne, der nächste Kreis um sie die Merkursbahn, in 11 gleiche Theile ge-

getheilt, denen jeder = 8 Tage (indem Merkur in 88 T. um die Sonne läuft), AC die eben so getheilte Erdbahn und HL einen Bogen der scheinbaren Himmelskugel oder des Thierkreises vorstellt; so wird, wenn die Erde in A und ☿ in m ist, dieser in seiner obenen ☌ und hinter der Sonne im weitesten Abstande von der Erde erscheinen, und an den Himmel nach der geraden Linie ASmO hinaus referiret. Zugleich wendet er seine erleuchtete Halbkugel der Erde gänzlich zu. Die Erde rückt dann von A nach 1, 2, 3, 4 und ♀ durch eben so viele Punkte seiner Bahn; kömmt immer weiter hinter der Sonne nach Osten herum, und die Gesichtslinien von der Erde zum Merkur zeigen am Firmament ein schnelles Fortrücken desselben an, auch kömmt bey 3 schon ein Theil seiner dunklen Halbkugel zum Vorschein. In der Gegend bey 5, wo dieser Planet seinen größten Abstand von der Sonne nach Osten erreicht, erscheint er auf der Erde nur halb erleuchtet, seine Bewegung wird langsamer; zwischen 5 und 6 scheint er eine Weile stille zu stehen, und in 6, wo seine Lichtsgestalt sichelförmig wird, fällt die Gesichtslinie schon rückwärts, und ☿ scheint rückgängig. Kömmt zwischen 7 und 8 die Erde in B, Merkur in n in seiner untern ☌; so kehrt er uns seine dunkle Halbkugel zu, und sein Zurückegehen gegen Westen wird immer merklicher, bis er über 9 hin seinen größten westlichen Abstand von der Sonne erreicht hat, seine retrograde Bewegung sich dann bey 10 und 11 wieder in ein Vorwärtsgehen verwandelt. Seine Sichelgestalt hat

in dieser Zeit immer mehr zugenommen, bis er uns in ♂ seine ganze erleuchtete Halbkugel abermals zuwendet.

Auf ähnliche Art läßt sich auch dieser Wechsel der Lichtsgestalter der oberen Planeten, wie ihre anscheinend unregelmäßige Bewegung darthun. Jener Wechsel, welcher bey Mars noch sehr deutlich zu beobachten ist, ist jedoch bey den weiter entfernten Planeten, eben wegen ihrer großen Entfernung von uns, beynahe unmerklich.

Durchgang des Merkurs und der Venus durch die Sonnenscheibe.

§. 36. Weil Venus und Merkur sich um die Sonne in geringerem Abstande von ihr, als die Erde, bewegen; so erklärt sich hieraus, warum sie sich während jeder synodischen Umlaufszeit zwischen uns und der Sonne befinden. Haben diese Planeten zu diesem Zeitpunkte nur eine geringe Breite; so sieht man auf der Sonnenscheibe einen schwarzen runden Flecken, dessen Breite, wenn Venus der Planet ist, etwa den 30ten Theil, ist es Merkur, nur den 150ten Theil der Breite der Sonnenscheibe ausmacht. Daher man die Merkursdurchgänge nur mit Fernröhren beobachten kann. Weil ferner diese Durchgänge nur erfolgen können, wenn die von der Erde aus gesehene Venus- und Merkursbreite, im Augenblicke der untern Conjunktion dieser Planeten, nicht größer ist, als der Halbmesser der Sonne, d. i. wenn, auf ähnliche Art, wie bey den Mondsfinsternissen, ihre untere ☌ sehr nahe am Knoten, für Venus in einem

Ab-

Abstande von kaum $1°\frac{3}{4}$ eintrifft; so sieht man ein, warum nicht, bey jeder untern Conjunktion dieser Planeten, auch immer ein Durchgang statt finde; vielmehr, daß diese Erscheinungen selten seyn müssen.

Kepler war der erste, welcher 1627 einen Durchgang der Venus und des Merkurs auf das J. 1631 und einen andern Durchgang der Venus für 1761 vorhersagte. Der erste traf wirklich, aber in der Nacht, wenige Tage nach Kepler's Tod, ein, und Gassendi suchte ihn daher umsonst, der aber für Merkur vorhergesagte Durchgang, ward von ihm beobachtet. Auch 1639 ereignete sich ein Durchgang der Venus, welchen Kepler nicht vorhergesagt hatte. Seitdem fielen bis 1789 incl. 15 andere Durchgänge des Merkurs vor. Halley berechnete 1691 mittelst der Perioden von 8, 7, 13, 33, 46, 217, 263 Jahren, nach welchen nämlich Merkur bey seiner unteren Conjunktion wieder zu demselben Knoten zurückekehrt, 29 Durchgänge; La Lande berechnete diese bis 1900. Vermöge der Perioden vor 8, 235, 243 Jahren berechnete ersterer 17 Durchgänge der Venus; letzterer berechnete alle bis auf das J. 3000.

Die Methode, diese Durchgänge zu beobachten, besteht darin, daß der Astronom mit Hilfe des Quadranten oder eines Netzes den Unterschied der geraden Aufsteigung und Abweichung sucht, um daraus auf den Unterschied der Länge und die Stunde der Conjunktion zu schließen.

Der vorzüglichste Nutzen aus der Beobachtung dieser Durchgänge ist dieser, daß man mittelst derselben die Sonnenparallaxe am allergenauesten finden kann, indem die Beobachtung dieser Durchgänge, bey welchen sich einzig ein dunkler runder Flecken auf leuchtendem Grunde zeigt, mit äußerster Genauigkeit geschehen kann. Von der Bestimmung der Sonnenparallaxe hängt die Berechnung der wahren Entfernungen den Weltkörper voneinander, und dann mittelbar auch von der Erde, und der Größe des ganzen Sonnensystemes ab.

Dritter Abschnitt.

Von den Ursachen der Ortsverschiebungen der Himmelskörper überhaupt.

Der Ort eines Gestirnes kann durch 3 Ursachen am Himmel verschoben werden: erstens dadurch, daß das von einem Himmelskörper ins Aug des Beobachters kommende Licht durch die Erdatmosphäre gebrochen wird; zweytens dadurch, daß wir die Gestirne, besonders die Planeten, nicht aus dem Mittelpunkte der Erde, sondern von ihrer Oberfläche aus beobachten; drittens dadurch, daß wir die Planeten nicht aus dem Mittelpunkte ihrer Bahnen, sondern aus verschiedenen Standpunkten der um die Sonne bewegten Erde betrachten.

I. Die

Refractions-Tafel,

um wahre Höhen in scheinbare zu verwandeln für 28″ 0,‴ 9 Barom. und + 8° Reaum.

Wahre Höhe	Refract.	Diff.	Wahre Höhe	Refract.	Diff.	Wahre Höhe	Refract.	Diff.
— 0° 30′	33′ 11″,1		4° 10′	11, 4″,1		8° 50′	5′ 56″,1	
20	31 36, 8	94″,3	20	10 45, 4	18″,7	9 0	5 49, 9	6, 2
10	30 7, 7	89, 1	30	10 27, 5	17, 9	10	5 43, 9	6, 0
+ 0 0	28 43, 9	83, 8	40	10 10, 5	17, 0	20	5 38, 1	5, 8
10	27 25, 0	78, 9	50	9 54, 3	16, 2	30	5 32, 6	5, 5
20	26 10, 5	74, 5	5 0	9 38, 9	15, 4	40	5 27, 3	5, 3
30	25 0, 1	70, 4	10	9 24, 3	14, 6	50	5 22, 2	5, 1
40	23 53, 5	66, 6	20	9 10, 3	14, 0	10 0	5 17, 1	5, 1
50	22 50, 6	62, 9	30	8 56, 8	13, 5	11 0	4 49, 8	27, 3
1 0	21 51, 5	59, 1	40	8 43, 9	12, 9	12 0	4 26, 4	23, 4
10	20 56, 0	55, 5	50	8 31, 7	12, 2	13 0	4 6, 3	20, 1
20	20 3, 9	52, 1	6 0	8 20, 1	11, 6	14 0	4 48, 9	17, 4
30	19 15, 3	48, 6	10	8 8, 8	11, 3	15 0	4 33, 6	15, 3
40	18 29, 4	45, 9	20	7 57, 9	10, 9	16 0	4 20, 1	13, 5
50	17 46, 3	43, 1	30	7 47, 4	10, 5	17 0	3 8, 0	12, 1
2 0	17 5, 6	40, 7	40	7 37, 2	10, 2	18 0	2 57, 1	10, 9
10	16 27, 3	38, 3	50	7 27, 3	9, 9	19 0	2 47, 3	9, 8
20	15 51, 3	36, 0	7 0	7 17, 8	9, 5	20 0	2 38, 4	8, 9
30	15 17, 4	33, 9	10	7 8, 7	9, 1	21 0	2 30, 3	8, 1
40	14 45, 3	32, 1	20	7 0, 1	8, 6	22 0	2 22, 9	7, 4
50	14 14, 9	30, 4	30	6 52, 0	8, 1	23 0	2 16, 2	6, 7
3 0	13 46, 3	28, 6	40	6 44, 3	7, 7	24 0	2 10, 0	6, 2
10	13 19, 4	26, 9	50	6 36, 9	7, 4	25 0	2 4, 1	5, 9
20	12 53, 9	25, 5	8 0	6 29, 7	7, 2	26 0	1 58, 6	5, 5
30	12 29, 5	24, 4	10	6 22, 6	7, 1	27 0	1 53, 6	5, 0
40	12 6, 4	23, 1	20	6 15, 7	6, 9	28 0	1 49, 1	4, 5
50	11 44, 5	21, 9	30	6 9, 0	6, 7	29 0	1 44, 8	4, 3
4 0	11 23, 7	20, 8	40	6 2, 5	6, 5	30 0	1 40, 6	4, 2
10	11 4, 1	19, 6	50	5 56, 1	6, 4	0		

I.

Die astronomische Stralenbrechung.

§. 37. Es sey BAD (Fig. 35.) die Oberfläche der Erde, EKG die äußere Oberfläche der Erdatmosphäre, deren Dichtigkeit bis zur Höhe von 15 Meilen noch merklich ist (wie unten erhellen wird); A sey der Ort des Beobachters, MK der auf die Atmosphäre schief auffallende Stral des Lichtes. Dieser wird nun, weil die Dichtigkeit der Atmosphäre von oben nach unten zu stetig wächst, eine gegen das Aug des Beobachters hohle Curve beschreiben, folglich so ins Aug kommen, als wenn er die gerade Linie KA, als Tangente jenes Bogens durchlaufen hätte. Mithin werden wir den Stern in M näher an dem Lothe oder der Zenithlinie AZ stehen sehen, oder ihn nach der Richtung von AK nach N am Himmel referiren. So ist es klar, daß uns alle Himmelskörper, welche nicht im Zenith selbst stehen, vom Horizonte herauf in jedem Vertikalkreise, also senkrecht höher erscheinen müssen, wodurch denn auch ihre Abstände von einander verändert werden.

Zwischen dem Sinus des Einfallswinkels MKR und dem Sin. des gebrochenen W. NKR, oder AKC, welchen der Stral nach der Brechung mit demselben Lothe MR auf die Atmosphäre bildet, herrscht ein konstantes Verhältniß bey unserer Atmosphäre. Newton fand, daß sich jener zu diesem verhalte, wie 3201 : 3200. Wenn daher FG ein anderer nach der Richtung GA gekrümm-

ter Lichtstral ist; so ist Sin. FGP: Sin. TGP = Sin. MKR: Sin NKR. Hieraus erhellt deutlich, daß je näher die Gestirne dem Horizonte stehen, desto grösser die Stralenbrechung sey, und jene selbst desto höher in einer Vertikalebene hinaufgehoben werden.

Correspondirende Sonnenhöhen, mit einem Quadranten und mit Hilfe einer guten Uhr gefunden, sind vorzüglich geschickt, die Grösse der Stralenbrechung zu bestimmen. Man kenne im Dreyecke PZS (Fig. 6.), gebildet am Pole, um das Zenith und an der Sonne, den Abstand PZ des Poles vom Zenith, und den Abstand PS der Sonne vom Nordpole aus ihrer bekannten Deklination, unabhängig von der Stralenbrechung. Mittelst der genommenen correspondirenden Sonnenhöhen weiß man auch, welche Stunde man habe, folglich ist auch der Stundenwinkel ZPS bekannt. Man kann nun SZ oder den Abstand der Sonne vom Zenith, und folglich die wahre Höhe der Sonne durch Rechnung finden. Gesetzt, diese sey = 8° 54′ für eine gewisse Stunde, und die zu derselben Zeit durch angestellte Beobachtung gefundene reelle oder scheinbare Sonnenhöhe sey = 9°; so weiß man, daß 6′ auf die Stralenbrechung kommen.

Zur Vermeidung des Stundenwinkels P wählt man einen der nördlichen Sterne, die im Meridian durch's Zenith oder nahe an diesem über den Pol vorbeygehen; wo folglich die Refraction bey genommener Höhe o ist, und man also aus der gefundenen Höhe den Abstand des

Sterns

Sterns vom Pole weiß. Nach 12 Stunden, wo der Stern unterm Pol durch den Meridian geht, findet man abermals seinen Abstand von diesem, aber viel geringer, indem der Stern, durch die Stralenbrechung gehoben, dem Pole näher gebracht wird. Daher denn dieser Unterschied die Größe der Refraction für die zuletzt gemessene Höhe giebt.

Nachdem man auf diese Art für mehrere Höhengrade die Stralenbrechungen ausgemittelt hatte, fand man, daß sie vom Zenith bis auf einen Abstand von mehr als 80° sich wie die Tangenten der Abstände vom Zenith verhalten. Bradley erweiterte gegen das J. 1760 diese Regel, indem er festsetzte: die Stralenbrechung in einer jeden Höhe gleicht der Tangente des scheinbaren, um die 3fache Größe der Stralenbrechung verringerten, Abstandes vom Zenith.

Nach diesem Gesetze hat Bradley die beygedruckte Tafel verfertiget. Zu Peru fand Bouguer die Horizontalrefraction nur = 27′. Aus der Vergleichung der von demselben, Maskelyne und Humbold angestellten Beobachtungen ergiebt sich, daß für die Aequatorialgegenden die Horizontalrefraction auf höchstens 30 — 31′ angenommen werden könne, während aus allen nördlichen Beobachtungen eine mitt

Scheinb. Höhe	Stralenbr.	
0°	32′	54″
2	18	31
4	11	48
6	8	25
8	6	29
10	5	14
15	3	30
20	2	35
25	2	1
30	1	38
40	1	8
50	0	47
60	0	33
70	0	20
80	0	10
90	0	0

mittlere Refraction von 35 — 36′ folgt. In den kalten Zonen ist sie beynahe dieselbe, wie bey uns. Auch fand Picard die Refraction im Winter größer, als im Sommer; Mayer fand 1753, daß die mittlere Stralenbrechung um den 22ten Theil jedesmal zunehme, so oft der Barometer um 15 Linien steige, oder der Reaumür'sche Thermometer um 10° falle. Auch sind die am Morgen erhaltene Stralenbrechungen größer, als die am Abende erhaltenen. Eine sehr genaue und vollständigere Refractionstafel, um wahre Höhe in scheinbare zu verwandeln, findet man am Ende beygefügt. Herr v. Zach machte sie in seinen „Tables abrégées et portatives de la lune etc. à Florence chez Molini, Landi et Comp. 1809“ bekannt (s. mon. Correspondenz ꝛc. März. 1810.).

Aus der Brechung und Zerstreuung der Lichtstralen erklärt sich die Dämmerung. Die Abenddämmerung macht, daß wir die Sterne nicht sogleich nach Sonnenuntergang am Himmel sehen, und die Größe, um welche die Sonne in einem Vertikalkreise unter den Horizont hinabgegangen seyn muß, bis man die Gestirne sehen kann, nennt man den Bogen der Emersion. Man fand diesen = 5° für die Venus, die man indessen zu gewissen Zeiten auch bey vollem Tage mit blosem Auge sieht; für Merkur und Jupiter = 10°, für Mars, Saturn und die Sterne erster Größe = 11 — 12°; für die Sterne 9ter Größe = 14° und für die kleineren = 18°. Daher sagt man, daß der Dämmerungskreis,

als

als kleinerer, dem Horizonte paralleler, Kreis, 18° unter dem Horizonte liege. Erreicht die Sonne nach ihrem Untergange diesen Kreis; so hört die Abenddämmerung auf; erreicht sie ihn vor ihrem Aufgange; so fängt die Morgendämmerung an.

Aus der Stralenbrechung erklärt sich auch, warum Mond und Sonne in oder nahe am Horizonte ellipsenförmig erscheinen, und zwar so, daß, ihren scheinbaren Durchmesser $= 32'$ gesetzt, die kleine Axe um $3' 35'' <$ ist, als die große.

Wenn SH (Fig. 35.) der vom Punkte H zum Punkte A reflektirte Lichtstral der 18° unter dem Horizonte AHI des Ortes A stehenden Sonne ist, so, daß AD = 18° (und AO = 9°), daher auch der Winkel SHI, unter welchem der letzte Sonnenstral SH den Horizont bey H trifft, = 18°; so ist der Einfallswinkel SHC = dem Ausfallswinkel CHA. Daher CHA $= \frac{1}{2}$ SHA $= \frac{1}{2}$ (180° — SHI) $=$ 90° — $\frac{1}{2}$ SHI; folglich der W. C $=$ 90° — CHA $= \frac{1}{2}$ SHI $=$ 9°. Daher, da im rechtwinkligen Dreyecke CHA CA: CH $=$ 1: Sec. C, oder $=$ 1: Sec. 9°, mithin CH — CA: CA $=$ Sec. 9° — 1: 1, hat man CH — CA oder HO d. i. die Höhe der Atmosphäre $=$ CA. (Sec. 9° — 1) $=$ CA. 0,0124625 $= \frac{1}{80}$ CA beynahe. Setzt man nun mit Picard den Erdhalbmesser $=$ 3269300 Toisen; so ist HO fast $=$ 40752 T. $= 20\frac{1}{2}$ franz. Meilen. De La Hire, welcher von dem Bogen von 18° wegen der Horizontalrefraction 32', und

wegen

wegen des scheinbaren Halbmessers der Sonne (indem der Lichtstral nur vom Sonnenrande kömmt,) 16′ abzieht, setzt den Winkel C = 8° 36′, daher findet er ungefähr 15 franz. Meilen für die Höhe der Atmosphäre.

II.

Die Parallaxe.

§. 38. Παραλλαξις heißt Veränderung, Verschiebung; so wird der von A aus (Fig. 36.) betrachtete und nach a referirte Körper C von dem andern Standpunkte B aus in b gesehen, folglich um die Linie ab verschoben; a und b sind des Körpers C optische Orte, und ihr Unterschied ab oder ihr Abstand von einander ist im allgemeinsten Sinne die Parallaxe des Körpers C.

Der Astronom nennt im strengern Sinne Parallaxe den Unterschied zwischen dem Orte, wo ein Stern, von der Erdoberfläche aus betrachtet, erscheint, und dem Orte, wo er uns erscheinen würde, wenn wir ihn aus dem Mittelpunkte der Erde sähen. Dahin muß sich der Beobachter gleichsam stellen, wenn er den wahren Ort und das wahre Gesetz der Bewegungen der Himmelskörper finden will, indem die Orte der Erdoberfläche eine zu verschiedene Lage gegen einander haben, als daß jene Bewegungen, von diesen so sehr verschiedenen Standpunkten aus betrachtet, regelmäßig erscheinen könnten.

Die

Die Parallaxe, in diesem Sinne genommen, nennt man auch zuweilen die tägliche, um sie von der jährlichen (prostaphaeresis orbis) zu unterscheiden. Diese ist nämlich der Unterschied zwischen der Länge eines Sterns, von der Erde aus gesehen, und seiner Länge, so fern er vom Mittelpunkte der Sonne aus betrachtet würde, d. i. zwischen der geocentrischen und heliocentrischen Länge eines Sternes.

Das Gestirn L wird aus dem Mittelpunkte C der Erde (Fig. 37.) in b, von dem Orte A ihrer Oberfläche in a am Himmel gesehen; ab ist also die Parallaxe für L. Des wahren Ortes b Abstand vom Zenith Z ist Zb, oder der Winkel ZCb, des scheinbaren Ortes a Abstand ist az, oder der W. ZAa, beyder Unterschied ist ba, oder ZAa — ZCb = ALC. Daher heißt auch dieser, von beyden Sehelinien AL, CL am Gestirne L gebildete Winkel, oder, was dasselbe ist, derjenige Winkel, unter welchem man von einem Weltkörper L aus den Halbmesser AC der Erde sieht, die Parallaxe oder der parallaktische Winkel des Weltkörpers L. Steht dieser, wie E und B im scheinbaren Horizonte Ah; so heißt jener Winkel die Horizontalparallaxe. Die übrigen Parallaxen nennt man Höhenparallaxen. Weil ferner für einen Beobachter in E, von wo aus seine Sehelinie senkrecht auf AC fällt, der parallaktische Winkel AEC der scheinbare Halbmesser der Erde ist; so kann man auch sagen: die doppelte Horizontalparallaxe ist dem scheinbaren Durchmes-

ser

ser der Erde, aus dem Gestirne betrachtet, gleich.

Also hat ein im Zenith Z stehender Stern S keine Parallaxe; je weiter aber dieser Stern vom Zenith absteht, desto grösser wird seine Parallaxe, so, daß seine Horizontalparallaxe am grösten ist. So ist eh = AEC für den Stern E weit grösser, als ab = ALC. Aber je weiter ein Stern vom Erdmittelpunkte absteht, desto kleiner ist seine Parallaxe, so ist ABC < AEC. Aber in demselben umgekehrten Verhältniße der Entfernungen eines Weltkörpers wird auch sein scheinbarer Durchmesser kleiner, folglich verhalten sich diese immer, wie die Horizontalparallaxen. So ist der Mondsdurchmesser beständig = $\frac{6}{11}$ seiner Parallaxe; der Halbmesser folglich $\frac{3}{11}$ des Erdhalbmessers, daher die Gröβe der Mondskugel fast $\frac{1}{49}$ der Gröβe der Erde, indem Kugeln sich wie die Würfel ihrer Halbmesser verhalten.

Auch ist aus der Figur deutlich, daß der Weltkörper S, L, oder E, aus der Oberfläche der Erde gesehen, niedriger erscheine, als wenn wir ihn aus dem Erdmittelpunkte sehen würden. Wenn man daher den wahren Ort des Gestirnes, oder seine wahre Höhe haben will, so muß man die Gröβe der Refraction von der gemessenen Höhe abziehen, dazu aber die Parallaxe addiren. Durch die tägliche Parallaxen ändern sich folglich die Längen, Rectascension ꝛc. der Weltkörper um kleine Bogen, die man Parallaxen der Längen ꝛc. nennt.

Stellt

Stellt man sich endlich das Gestirn E um die Erde, wirklich oder scheinbar, bewegt vor; so ist es in E im scheinbaren Horizonte Ah des Ortes A, in η aber ist es im wahren Horizonte CH. Beyde Horizonte sind also in Beziehung auf E um den Bogen Eη, das Maß des Winkels ECη, von einander entfernt. Aber AEC = ECη, also kann man auch den Bogen Eη, um welche beyde parallele Horizonte von einander abstehen, die Horizontalparallaxe nennen. Setzen wir nun, ein Fixstern erscheine in demselben Augenblicke, wo er in η ist, auch im scheinbaren Horizonte; so hätte er keine Parallaxe. Hätte er eine solche; so müßte er, wenn er im Aequator stünde länger unter dem Horizonte, als über diesem verweilen; ferner müßte sich seine Lage gegen andere Fixsterne verändern, so bald man ihn aus verschiedenen sehr entfernten Stellen der Erde betrachtete. Nun lehrt die Erfahrung, daß dieses nicht geschieht, sondern daß in Ansehung jedes Fixsternes beyde Horizonte zusammen fallen; also schließen wir mit Recht, daß Fixsterne keine Parallaxe haben, ihre Entfernung folglich vom Erdmittelpunkte immens seyn müsse, so, daß die Erde vom Fixstern aus betrachtet, als Punkt erscheine.

Für unsere Figur folgt hieraus, daß, weil das Himmelsgewölbe noch hinter den Fixsternen zu liegen scheint, der äußere Kreis ZbH unendlich erweitert angenommen werden muß, so, daß sein Mittelpunkt eben so gut in E oder L als in C ist, folglich die Bogen eh, ba in der That die Maße der Winkel bey E und L sind.

Sätze für die Parallaxe.

§. 39. 1. Im Dreyecke ALC ist

LC: CA = Sin. CAL oder Sin. ZAL: L

d. i. die Weite des Gestirnes L vom Erdmittelpunkte verhält sich zum Erdhalbmesser, wie der Sin. des scheinbaren Abstandes des Sternes L vom Zenith zum Sin. seiner Parallaxe. CA = 860 geogr. Meilen, folglich, wenn man auch LC und CAL oder ZAL weiß, kann man auch die Parallaxe berechnen; und umgekehrt.

2. Sin. L: Sin. ZAL = CA: LC, d. i. sind beyde erste Stücke bekannt; so kann man auch den Abstand des Sternes vom Mittelpunkte der Erde finden.

Dieser Proportion kann man sich aber nicht mehr mit Zuverläßigkeit bedienen, um die Weite eines Himmelskörpers zu bestimmen, so bald der parallaktische Winkel L bey sehr großer Entfernung LC, wobey AC gegen LC als verschwindend zu betrachten ist, sehr klein wird. Denn in diesem Falle würde bey begangenem kleinen Fehler die Weite LC beträchtlich zu groß oder zu klein gefunden werden. Man wird daher eine größere Seite, als AC, für das Dreyeck zu erhalten suchen müssen (wie wir dieß bey Auffindung der Sonnenparallaxe sehen werden), um LC berechnen zu können.

3. In Ansehung der Horizontalparallaxe E ist

Sin. E: AC = 1 (oder Sin. tot.): EC, daher

EC

$$EC = \frac{1}{\text{Sin. E}} \cdot AC = \text{cosec. E. AC}$$

d. i. die Cosekante der Horizontalparallaxe giebt den Abstand des Gestirnes vom Erdmittelpunkte, in Erdhalbmessern ausgedrückt. Wäre z. B. die Horizontalparallaxe der Sonne $= 8''\frac{1}{2}$ gefunden; so ist, wenn man statt des Sin. tot. den ihm gleichen Bogen, oder 206264,8 (T. S. 342.), und $8''\frac{1}{2}$ statt Sin. setzt, $\frac{206264,8}{8,5} = 24266 = EC$ in Erdhalbmessern. Auf diese Art berechnete man die Abstände der Planeten von der Erde, wie sie die am Ende beygefügte Tafel zeigt, wobey der Erdhalbmesser $= 1432\frac{1}{2}$ franz. Meile, jede M. $= 2283$ Toisen gesetzt ist.

4. Wenn ein Weltkörper von C immer gleich weit entfernt bleibt, oder $LC = FC$ ist; so verhalten sich seine Parallaxen, wie die Sinusse seiner Abstände vom Zenith.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Denn Sin. L: Sin. ZAL} = \text{CA: LC} \\ \text{und Sin. F: Sin. ZAF} = \text{CA: FC}\end{array}\right\} = \text{CA: LC,}$$

also bilden auch die ersten Verhältnisse eine Proportion; aber die Parallaxen, als sehr kleine Winkel; verhalten sich wie ihre Sinusse, also ist die angeführte Proportion gültig.

5. Es ist folglich auch L: B = Sin. ZAL: Sin ZAB oder: r, oder Sin. ZAL: r = L: B, d. i. aus der gefundenen Höhenparallaxe eines Sterns kann man auch

seine

seine Horizontalparallaxe finden durch die Proportion: der Sin. seines scheinbaren Abstandes verhält sich zum Sin. tot., wie die Höhenparallaxe zur Horizontalparallaxe, und umgekehrt, weiß man den scheinbaren Abstand des Gestirnes vom Zenith; so findet man aus r: Sin. ZAL = B: L die Höhenparallaxe; — oder wenn r = 1, die Horizontalparallaxe = P, die Höhenparallaxe = p gesetzt wird; so ist, weil Sin. ZAL = cos. der scheinbaren Höhe (= h), p = P. cos. h = P. Sin. ZAL.

Die Horizontalparallaxe zu finden.

§. 40. Aus dem Vorigen erhellt deutlich, daß man zur Bestimmung der Entfernung eines Weltkörpers vom Mittelpunkte der Erde und zur Auffindung seiner Höhenparallaxe nur seine Horizontalparallaxe zu finden brauche. Zu diesem Zwecke dient folgende Methode:

Es seyen B und C (Figg. 38. 39.) zwey unter demselben Meridian in ziemlicher Entfernung von einander liegende Orte der Erde, an welchen zwey Astronomen nach vorhergegangener Verabredung in denselben Nächten einen bestimmten Planeten M und bestimmten Fixstern L in demselben Meridian beobachten. Die Gesichtslinien nach dem Fixstern L, nämlich BL und Cl, werden parallel seyn; allein die Sehelinien BM und CM werden sich in M schneiden. Jeder Beobachter mißt nun des Planeten M Abstand vom Fixstern, nämlich MBL = β, und MCl γ =, deren Summe gleich ist dem W.

BMC;

BMC; würde aber der Planet auf einerley Seite des Fixsterns gesehen, wobey denn — die Sehelinien BL, Cl die Lage der punktirten Linien hätten; so wäre BMC der Unterschied jener gemessenen Winkel β und γ.

Ferner läßt auch jeder Beobachter zugleich den Abstand des Planeten von seinem Zenith messen, nämlich bBM = b und cCM = c (Fig. 39.). Alsdenn sind o und x die Höhenparallaxen. Aber o = P. Sin. b und x = P. Sin. c (§. 39. 5)); also o + x oder BMC = P (Sin. b + Sin. c) folglich P =

$$\frac{\beta + \gamma}{\text{Sin. b} + \text{Sin. c.}}$$

So beobachtete La Caille den 6ten Oct. 1751 auf dem Vorgebürge der guten Hoffnung den Mars im Mittagskreise 25° 2′ vom Zenith, seinen nördlichen Rand 26″, 7 nordwärts von λ des Wassermanns; Wargentin fand zu gleicher Zeit in Stockholm jene erste Größe = 68° 14′, letztere, nämlich den nördlichen Rand von demselben Sterne 6″, 6 südwärts abstehend; daher die Horizontalparallaxe des Mars =

$$\frac{26,''7 + 6'',6}{\text{Sin. } 25° 2' + \text{Sin. } 68° 14'} = 24'', 596.$$

Nach derselben Methode haben La Caille und La Lande 1751, jener auf dem Vorgebürge d. g. H., dieser zu Berlin die grösste Horizontalparallaxe des Mondes (zur Zeit, wo er in seiner Erdnähe und in ☌ ☉ ist) = 61′ 25″, die kleinste = 53′ 53″

unter

unter der Breite von Paris gefunden. Die Abplattung der Erde aber macht, daß jene Horizontalparallaxe unter dem Aequator 9″ mehr, unter den Polen 7″ weniger, also unter dem Aequator 16″ mehr, als unter den Polen beträgt. Hieraus folgt, daß die kleinste Entfernung des Mondes von der Erde 55,871, die größte 63,625, die mittlere 59,748 Erdhalbmesser, oder jene 48021, die zweyte 54686, die letzte 51353 geogr. Meilen beträgt.

Zur Auffindung der Horizontalparallaxe der Sonne dient, wie wir oben schon bemerkten, vorzüglich die Beobachtung der Durchgänge der Venus, und zwar auf folgende Weise:

Es sey die Venus in C (Fig. 40.), gerade in der untern ☌ mit der Sonne, und Vv ein Stück ihrer von Westen nach Osten kurz vor und nach der Conjunction durchlauffenen Bahn. Beobachten nun zwey Astronomen an 2 entfernten Erdorten A und B den Eintritt der Venus in E; so wird dieser von dem Beobachter in A gesehen, wenn die Venus nach F, — und von dem in B, wenn sie nach G kömmt. Man kennt also nun die Zwischenzeit, bis die Venus den Bogen FG durchlief. Nun ist die Geschwindigkeit ihrer Bewegung, aus der Sonne S betrachtet, genau bekannt, folglich kann man auch aus jener gefundenen Zwischenzeit die Grade des Bogens FG, folglich auch (da der Halbmesser der Sonne gegen ihre Entfernung von der Venus in keine Betrachtung kömmt, es folglich gleichviel ist, ob man FG aus E oder aus S sieht,)

sieht,) den Winkel FEG oder AEB finden, unter welchem man den Abstand AB bey den Orten A und B sieht.

Stellt nun AQ (Fig. 41.) die bekannte geographische Breite des Ortes A, BE die des Ortes B, und der Bogen EQ aus dem Erdäquator den bekannten Unterschied der geographischen Längen derselben Orte vor; so kann man, weil EQ das Maß von P und AP = 90° — AQ, etc. ist, im sphärischen Dreyecke APB den Abstandsbogen AB beyder Orte von einander, oder nach Fig 40. den Bogen AHB, mithin auch dessen Sehne AB finden. Weiß man aber den Winkel E, unter welchem diese Sehne von der Sonne aus erscheint; so kann man auch daraus sogleich den Winkel, unter welchem der Erdhalbmesser selbst, aus der Sonne gesehen, erscheint, folglich die Sonnenparallaxe finden.

Wenn man nach einer indirekten Methode eine Sonnenparallaxe der Berechnung der Dauer eines solchen zu beobachtenden Durchganges für 2 entfernte Orte A und B zum Grunde legt, und dann findet, daß die wirklichen Beobachtungen mit jener Annahme übereinstimmen; so ist dieß ein Beweis der Richtigkeit dieser angenommenen Parallaxe. Auf diese Art wurde im J. 1769, wo Hell zu Wardhus am nördlichsten Ende von Lappland, Green, Cook und Solander zu Otaheite, ꝛc. den Durchgang der Venus beobachteten, gefunden, daß die Sonnenparallaxe zwischen 8″, 6

und 8″,7 fällt, so, daß die Ungewißheit nicht einmal $\frac{1}{10}$ beträgt.

Die Sonnenparallaxe ist demnach 398mal kleiner, als die Parallaxe des Mondes, folglich die Sonne 398mal weiter, als der Mond, von der Erde entfernt, oder ihre mittlere Weite ungefähr = 20,600000 Meilen. Daher würde eine Kanonenkugel, die in einer Sekunde 1500 Fuß durchliefe, erst in 11 Jahren zur Sonne kommen.

Nun kennen wir genau die periodischen Umlaufszeiten aller Planeten um die Sonne; diese stehen aber nach einem Keplerischen Gesetze, wie wir bald erörtern werden, im Verhältniße zu ihren Abständen von der Sonne, — also sind wir durch die Bestimmung der Sonnenparallaxe im Stande, diese Abstände, und sohin die Größe unseres Sonnensystems zu finden.

Zusatz. Wir haben oben schon bemerkt, daß auch der nächste Fixstern keine Parallaxe habe, folglich unermeßlich weit von uns entfernt seyn müsse. Die Astronomen gaben sich alle Mühe, auszumitteln, ob nicht einer der größesten Fixsterne, wie der Sirius, eine jährliche Parallaxe habe, oder ob nicht der Winkel SPC (Fig. 42.), wenn nämlich der Sirius in P, und ADCB die Erdbahn vorstellt, meßbar sey. Allein sie fanden, daß dieser Winkel, oder die Parallaxe der Erdbahn, nicht einmal $\frac{1}{3}$ Sekunde betrage; daß wir folglich, wir mögen uns mit der Erde in ihrer Bahn entweder

weder in D oder in C oder in A befinden, den Fixstern beständig in P sehen, demnach der ganze Erddurchmesser gegen die Weite des Fixsterns zum Punkt verschwinde, diese also unermeßlich sey.

Setzen wir jedoch den Winkel SPC = 1″; so fände man aus tang. SPC: r = SC: SP, die Weite des Fixsterns schon = 206264. SC d. i. um diese Zahl größer, als den Halbmesser der bahn, d. i. in jenem Falle wäre der Fixstern schon über 200000 mal weiter von uns, als die Sonne. Da nun die Parallaxe eines Fixsterns noch viel kleiner ist, als 1″; so ist gewiß, daß der allernächste Fixstern 3 — 400tausendmal weiter, als die Sonne, also vielleicht 6 — 8 Billionen Meilen von uns entfernt ist. Wir würden daher, wenn wir jährlich 1000 Mill. M. zurückelegen könnten, erst in 6 — 8000 Jahren zum nächsten Fixstern kommen; ja selbst auf den Flügeln des Lichtes würden wir daselbst erst in 5 — 6 Jahren ankommen. Wie viele Veränderungen können daher nicht auf einen Fixstern binnen dieser Zeit vorgegangen seyn, ohne daß sie von uns bemerkt worden sind; ja wie mancher Fixstern kann schon mehrere Jahre lang verschwunden seyn, ungeachtet wir ihn noch am Himmel erblicken!

Da ferner die meisten Fixsterne, mit Fernröhren betrachtet, nur wie leuchtende Punkte erscheinen, deren scheinbarer Durchmesser noch nicht 1″ ist, und da bey ihrer großen Entfernung von uns nur wenige Licht-

stralen in unser Aug kommen können, welches dennoch so stark von ihnen affizirt wird; so schließen wir mit Recht, daß die Fixsterne kein erborgtes, sondern ihr eigenes Licht haben, wahre Sonnen seyn müssen. Herschel sah mit Hilfe seiner vortreflichen Telestope einige Fixsterne, besonders die Wage und die Capella wie kleine Scheiben, deren scheinbaren Durchmesser $\frac{38''}{107}$ und $2''\frac{1}{2}$ waren. Demnach muß der wahre Durchmesser der Wage wenigstens 58mal und der Capella 260mal größer, als der Durchmesser unserer Sonne seyn, oder jener über 7, dieser über 49 Mill. Meilen betragen. Berechnet man hieraus die Solidität dieser Fixsterne; so findet man, daß der erste 55308mal und dieser 19 Mill. mal größer, als unsere Sonnenkugel ist. Nähme man von diesen Zahlen auch eine beträchtliche Quantität weg; so bliebe doch noch eine erstaunte Größe dieser Fixsterne. Denkt man sich nun diese Fixsterne darum größer uns erscheinend, weil sie uns näher liegen, Millionen Fixsterne aber wegen ihrer größeren Entfernung kleiner, als jene, zwar erscheinend, doch an und für sich von derselben Größe, wo nicht noch größere Kugeln; — denkt man sich ferner jede Sonne aus diesem nicht wohl berechbaren Heere von Sonnen, analog mit der unsrigen, bestimmt, Licht zu geben ihren Planeten und den Trabanten derselben; — so finden wir unsere Einbildungskraft zu schwach, das Weltall zu umfassen; fühlen, welch' ein kleiner Punkt in diesem Wesen All unsere Erde, ja unser ganzes Sonnensystem sey; für

den

den Menschen, auf der einen Seite von der Größe seines Geistes, welcher sich von einem so kleinen Punkte aus zum Universum emporschwingt, gehoben, welche Demüthigung auf der andern Seite, wenn er wähnen konnte, daß für ihn einzig dieses All durch des Unbegreiflichen Wort aus dem Nichts hervorgerufen worden sey!

III.

Geocentrische und heliocentrische Länge der Planeten.

§. 41. Die Bewegung der Erde um die Sonne macht jeden Standpunkt, aus welchem wir die Planeten von der Erde aus betrachten, veränderlich. Um also jene an ihrem wahren Orte zu sehen, müßten wir uns eigentlich im Mittelpunkte der Sonne, als dem Centrum der Planetenbahnen, befinden. Man unterscheidet daher den Ort eines Planeten im Thierkreise, von der Erde aus gesehen, d. i. den geocentrischen Ort, von dem heliocentrischen Orte, wo der Planet von der Sonne aus erscheint. Daher auch die Unterscheidung zwischen geocentrischer und heliocentrischer Länge eines Planeten.

Um den heliocentrischen Ort eines Planeten zur Bestimmung seiner wahren Bewegung um die Sonne aufzufinden, muß man ihn zur Zeit seiner Opposition oder Conjunktion mit der Sonne beobachten, indem er dann in demselben Punkte der Ecliptik von uns gesehen

wird,

wird, in welchem er, von der Sonne aus betrachtet, erscheinen würde. Wird z. B. ein Planet P (Fig. 42.) zur Zeit seiner Opposition aus A, oder zur Zeit seiner Conjunktion aus B im Punkte p der Ecliptik gesehen; so würden wir ihn aus S in demselben Punkte p sehen, wenn wir im Sonnenmittelpunkte wären. Nennen wir den Winkel SPD, unter welchem man vom Planeten P aus den Halbmesser der Erdbahn sieht, die jährliche Parallaxe; so ist deutlich, daß sich diese mit dem Orte, in welchem sich der Planet in seiner Bahn jedesmal befindet, verändere, und zwar am größten werde, wenn der Planet sich in seiner Sonnennähe befindet, wo die Sehelinie PS auf SD senkrecht fällt.

Beobachtet man nun die Zeit, welche von einer Opposition oder Conjunction des Planeten zur andern verfließt; so kennt man seine synodische Umlaufszeit. Beobachtet man ferner mehrmals, durch wie viele Grade der Planet in der Zeit zwischen zwey aufeinanderfolgenden Conjunctionen oder Oppositionen in seiner Bahn fortrückte; so findet man durch eine einfache Proportion die Zeit, die er braucht, um alle 360° seiner Bahn zu durchlauffen, d. i. man findet seine periodische Umlaufszeit. Beyde Umlaufszeiten mit der syderischen habe ich in der angehängten Tabelle so viel möglich, richtig anzugeben gesucht.

Die

Die heliocentrische Länge der Knoten, oder die Lage der Knotenlinie der Planeten zu finden.

§. 42. Die Ecliptik EL (Fig. 43.) ist nichts anders, als derjenige größte Kreis, in dessen Ebene die Erdbahn el liegt (§. 33.); daher sind die Knoten eines Planeten die gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte ☊ und ☋ der Planetenbahn PQ und der Ebene der Erdbahn EL. Nun ist aber die Sonne in beyden Ebenen zugleich, folglich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte ☊S☋, oder in der Knotenlinie, also müssen die Knoten einer jeden Bahn, von der Sonne S aus gesehen, einander gerade gegenüber stehen.

Hieraus folgt, daß, so oft wir von der Erde aus den Planeten in der Ecliptik sehen, dieser zwar wirklich in ihr, also in einem seiner Knoten sich befinde; aber wir müssen doch noch seinen heliocentrischen Ort finden. Es stelle (Fig. 44.) die Papierfläche die Ebene der Ecliptik oder der Erdbahn vor; in S sey die Sonne, und ON sey die Knotenlinie. Nun sey die Erde ♁ zur Zeit, wo die beobachtete Breite des Planeten = 0, oder dieser sich im Knoten N befindet, in M. Bestimmt man dann die geocentrische Länge MN des Planeten und die der Sonne, vorgestellt durch die nach A verlängerte MS; so weiß man den Winkel SMN, d. i. den Unterschied beyder Längen für die Zeit, wo die Erde in M ist.

Kömmt der Planet wieder in denselben Knoten N, wenn die ♁ z. B. in T ist; so bestimme man abermals nach den Linien TN, TB jene geocentrischen Längen; so hat man den Längenunterschied, oder den Winkel STN und zugleich TSM = ASB, d. i. den Unterschied zwischen der Sonnenlänge, da die Erde in M und dann in T war. Da nun auch die jedesmalige Entfernung der Sonne von der Erde MS, TS bekannt ist; so kann man aus dem Dreyecke TMS, wo nebst dem eingeschlossenen W. TSM auch jene 2 Seiten bekannt sind, alle übrigen Stücke finden.

Nun ist STM — STN = NTM, und SMT + SMN = TMN; aber 180° — (TMN + NTM) = TNM, woraus man also durch

Sin. TNM: Sin. TMN = TM: TN

die Entfernung TN des Planeten von der Erde, wenn er in seinem Knoten N ist, findet.

Sucht man eben so zugleich die Entfernung NS des Planeten von der Sonne, indem man im Dreyecke STN aus TS, TN und TSN alles Uebrige finden kann; zieht dann TSN von 180° ab; so hat man BSN, d. i. den Unterschied zwischen der Sonnenlänge zur Zeit, wo die Erde in T war, und der heliocentrischen Länge des Knoten N. Nun ist die aus T beobachtete Sonnenlänge bekannt, folglich giebt der W. BSN, wenn man ihn zu jener addirt, oder davon abzieht (je nachdem die geocentrische Länge des Knoten N aus T

be-

beobachtet > oder < ist), die heliocentrische Länge des Knoten N selbst.

Weil endlich die heliocentrische Länge des andern Knoten O vom Knoten N 6 Zeichen entfernt ist; so ist die Lage der Knotenlinie des Planeten genau bekannt.

Wie beym Monde, so gehen auch bey den Planeten die Knoten jährlich zurücke, bey Merkur ungefehr um 45″, bey Venus 31″, bey Mars 40″, Jupiter 60″, Saturn 30″.

Die Neigung der Planetenbahnen gegen die Ecliptik zu finden.

§. 43. Es sey OE (Fig. 45.) die Ebene der Ecliptik, OQ die Ebene der Bahn des Planeten P; so ist NO, als Durchschnittslinie bey der Ebenen, die Knotenlinie, deren Lage bekannt seyn soll. Der von den 2 Lothen PH, RH gebildete W. PHR ist die gesuchte Neigung. Auch ist das Loth PR auf HP selbst auf OE senkrecht (G. §. 153.). Beobachtet man nun, wenn die Sonne in demjenigen Punkte der Ecl. erscheint, welcher der bekannte heliocentrische Ort N des einen Knoten ist; so weiß man, daß jetzt die Erde sich in der Knotenlinie NT z. B. in T befinde (§. 42.). Also ist PTR die beobachtete geocentrische Breite des Planeten P, und der Ort R in der Ecliptik seine geocentrische Länge, folglich der W. RTH der Unterschied zwischen der geocentrischen Länge TR des Planeten P und

der

der heliocentrischen Länge SN oder TN seines Knoten N, oder des Planeten Elongation. Dieser Winkel nun sey aus den Beobachtungen dieser Längen bekannt. Weil ferner die Dreyecke PRT, PHT, RHT rechtwinklig sind, jenes in R, dieses in H; so ist

TR: r = PR: tang. PTR und

TR: r = HR: Sin. RTH

folglich PR: HR = tang. PTR: Sin. RTH;

aber PR: HR = tang. PHR: r,

also Sin. RTH: r = tang. PTR: tang. PHR

d. i. man erhält die gesuchte Neigung durch die Proportion: der Sinus der Elongation verhält sich zum Sin. tot., wie die Tangente der beobachteten geocentrischen Breite des Planeten zur Tangente der Neigung.

Auf diese Art fand man die in der angehängten Tafel verzeichnete Neigungen der Planeten zur Ecliptik oder Erdbahn; wobey zu bemerken ist, daß die dortige Zahlen keine konstante Grösen sind, weil durch das Zurückegehen der Knoten der Planeten auch die Neigung derselben nothwendig geändert wird. Man sieht indessen aus der Tafel, daß Uranus fast in der verlängerten Ebene der Erdbahn liege; Merkur aber die grösste Neigung habe. Die Neigung der Venusbahn ist zwar weit kleiner; allein da die Venus in ihrer untern Conjunction der Erde sehr nahe kömmt; so kann sie uns bis $8^{\circ}\frac{3}{4}$ über oder unter der Ecliptik zu stehen scheinen, weßwegen man auch den Thierkreis auf jeder Seite der Ecliptik

auf

auf 9° von dieser gezogen hat. Wegen der 4 zuletzt entdeckten Planeten aber müßte der Thierkreis sehr erweitert werden, wenn er der Raum bleiben sollte, innerhalb welchem sich alle Planeten unseres Sonnensystems bewegen.

Auflösung verschiedener Aufgaben.

§. 44. Hat man einmal die Knoten und Neigung der Bahn eines Planeten aufgefunden; so vermag man leicht folgende Probleme zu lösen.

a. Die Entfernung eines Planeten von der Sonne und der Erde zu finden.

Es sey die Sonne in S (Fig. 46.), die Erde in T, der Planet in P, einer seiner Knoten in N. Aus P ziehe man PH auf die Knotenlinie NO senkrecht. Aus H errichte man in der Fläche der Ecliptik NTS das Loth HR auf NO, und fälle aus T auf HR das Loth PR. Mithin ist PR auf die Ebene der Ecliptik selbst senkrecht, also auch auf TR und SR; daher ist

PHR die Neigung der Bahn des Planeten P;

PTR seine geocentrische Breite;

STR der Unterschied zwischen der Länge der Sonne und der geocentrischen Länge des Planeten, oder die Elongation (§. 43.).

TSH der Unterschied zwischen der heliocentrischen Länge der Erde und des Knoten N.

Da nun PHS, RHS rechte Winkel sind; so ist im Vierecke HRTS 360° — (RHS + THS + STR) = HTR.

Beobachtet man aus T die geocentrische Breite des Planeten PTR; seine geocentrische Länge, die in der Ecliptik nach TR hin liegt, und die Länge der Sonne; so hat man auch die heliocentrische Länge der Erde, die von den letztern 6 Zeichen entfernt ist, folglich auch STR und TSH.

In den rechtwinkligen Dreyecken HRP, TRP ist

HR: PR = r: tang. PHR,

PR: TR = tang. PTR: r

folglich HR: TR: = tang. PTR: tang. PHR; setzt man daher HR = tang. PTR; so ist auch TR = tang. PHR.

Man suche also im Dreyecke HRT aus HR, TR und HRT die beyden andern Winkel, und ziehe RHT von RHS (= 90°) ab; so weiß man THS. Sucht man ferner TH aus Sin. THS: TS = Sin. TSH: TH, und hieraus TR durch

Sin. HRT: TH = Sin. RHT: TR;

so weiß man

1) die sogenannte kurtirte Weite TR des Planeten P von der Erde, d. i. man weiß, wie weit derjenige Punkt R in der Fläche der Ecliptik, auf welchen das Loth PR fällt, von T entfernt ist.

2) Die

2) Die wahre Weite PT des Planeten von T erhält man durch

Sin. TPR (= 90° — PTR): TR = r: PT.

b. Die heliocentrische Länge SR des Planeten und seine jährliche Parallaxe zu finden.

Im Dreyecke SRT suche man aus TR, TS und RTS die anderen Winkel; so giebt TSR den Unterschied zwischen der heliocentrischen Länge der Erde, die nach ST liegt, und des Planeten P, die nach SR liegt. Da nun die Länge der Erde bekannt ist; so hat man auch SR. Aber der andere Winkel TRS giebt den Unterschied zwischen des Planeten heliocentrischen und geocentrischen Länge, d. i. seine jährliche Parallaxe (§. 38.).

c. Die kurtirte Weite SR des Planeten von der Sonne zu finden.

Es ist Sin. TSR: TR = Sin. STR: SR, d. i. SR zeigt, wie weit der Punkt R, in welchen das Loth PR fällt, in der Ebene der Ecliptik von der Sonne entfernt ist.

d. Die heliocentrische Breite PSR und die wahre Weite PS des Planeten von der Sonne zu finden.

In den Dreyecken PRT, PSR ist

1) TR: PR = r: tang. PTR
PR: SR = tang PSR: r, daher
SR: TR = tang. PTR: tang. PSR.

2) 90° — PSR = SPR und
Sin. SPR: SR = r: PS.

Die am Ende beygefügte Tabelle zeigt die zwischen der größten und kleinste Weite gefundene mittlere Entfernung der Planeten von der Sonne, wobey, die Entfernung der Erde von der Sonne (absolut genommen) ungefähr = 20851500 teutsche Meilen = 34 Millionen alt-franz. M. ungefähr gesetzt, die angegebenen Entfernungen leicht zu schätzen sind. Das Verhältniß dieser Entfernungen der alten Planeten drückt man durch die merkwürdige Zahlenreihe aus:

☿ ♀ ♁ ♂ 4

4; 4+2°.3; 4+2¹.3; 4+2².3; * 4+2⁴.3; 4+2⁵.3; 4+2⁶.3; aus dieser, auch durch den Uranus bestättigten, Zahlenreihe schloß man, daß zwischen Mars und Jupiter noch ein Planet liegen müsse; allein statt eines entdeckte man nebst der Pallas die drey Töchter des Saturns, Ceres, Juno, Vesta, zwischen jenen Planeten.

Dadurch, daß man die heliocentrische Länge und Breite eines jeden Planeten für verschiedene Zeitpunkte seines Umlaufes um die Sonne beobachtete, und diese Beobachtungen in Tafeln brachte, war man im Stande, zu berechnen, wie weit der Planet, von der Sonne aus betrachtet, von der Ecliptik jeden Tag abstehe, und in welchem Punkte seiner Bahn er jeden Tag sich befinde, wie geschwind also jedesmal seine Bewegung sey. Hieraus ergab sich, daß sich der Planet um so langsamer bewege, je mehr er sich der Sonnenferne nähere.

Kep-

Keplers Theorie, die nun folgt, wird diesen Gegenstand aufhellen.

Zusätze. 1. Nach dieser Bestimmung der Entfernungen der Planeten von der Sonne ist also, jene Entfernungen durch runde Zahlen ausgedrückt, unser Sonnensystem folgendes:

11 Hauptplaneten mit 18 Nebenplaneten bewegen sich um die Sonne von Westen nach Osten in dieser Ordnung: zuerst Merkur in einer Weite von 8 Millionen Meilen; von 15 Venus; von 21 die Erde mit ihrem Monde; von 31 Mars; von 56 — 58 Vesta, Juno, Pallas und Ceres; von 108 Jupiter mit seinen 4 Monden; von 199 Saturn mit 7 Monden; dann in einer Weite von 400 Mill. Meilen Uranus mit 7 Trabanten.

2. Die Stärke des Lichtes steht im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen von dem leuchtenden Körper, von welchem die dunklen Körper das Licht empfangen (s. Lambert's gründliches und in seiner Art einziges Werk „Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae" — Augsburg 1760 — §. 48.). Wenn man also die Stärke des Sonnenlichtes auf jedem Planeten finden will; so darf man nur, die Weite der Erde = 10 gesetzt, die Quadrate jener Zahlen der angeführten Reihe, nämlich 4, 7, 15, 28, 52, 95, 145 zum Quadrat von 10 in Verhältniß setzen, um zu wissen,

wie

wieviel stärker oder schwächer das Licht auf einem Planeten sey, als auf der Erde. Dadurch findet man, daß das Licht auf dem Merkur fast 7, auf der Venus fast 2mal stärker, aber auf dem Mars 2, auf der Vesta und den übrigen neuen Planeten 8, auf Jupiter 27, Saturn 93 und auf dem Uranus 380mal schwächer sey, als auf der Erde. Auf letzterem ist es dennoch so helle, als es bey uns des Nachts seyn würde, wenn 300 Vollmonde zugleich am Himmel schienen.

Vierter Abschnitt.

Von der Keplerischen Theorie.

Erstes Keplerisches Gesetz.

§. 45. Johann Kepler (geb. 1571 den 27ten December entweder zu Weil oder Wagstett im Wirtembergischen, gest. 1631 d. 15. Nov.), noch Tycho's Zeitgenosse, berechnete mit diesem den Lauf des Mars. Da die berechneten Weiten dieses Planeten in keinen eccentrischen Kreis paßten, verfiel er auf den Gedanken, ob sich nicht Mars in dem regelmäßigsten Oval, der Ellipse, bewege. Da nun jene Weiten, auf die Ellipse angewendet, alle zutrafen; so war er gewiß, daß Mars nicht in einem Kreise, sondern in einer Ellipse sich bewege, was er auch im J. 1609 in seiner Commentatio

tatio de stella Martis bekannt machte. So fand Kepler sein erstes Gesetz, daß nämlich alle Hauptplaneten um die Sonne, alle Nebenplaneten um jene sich in Ellipsen bewegen, in deren einem Brennpunkte die Sonne oder der Hauptplanet sich befindet.

Die elliptische Bahn eines Planeten ist ganz bestimmt, wenn man die große Axe AP (Fig. 47.) und die Eccentricität SC = FC (K. §. 23. Zus. 4.) weiß, so, daß man sie nach §. 25. d. K. leicht verzeichnen kann. Beyde findet man aber auf folgende Art:

Aus §. 24. Zus. 4. d. K. weiß man, daß A und P die Apsiden (apsides), AP die Apsidenlinie (linea apsidum) heiße; ferner ist A die Sonnenferne (aphelium), P die Sonnennähe (perihelium) des Planeten, welche beyde aus den heliocentrischen Oertern, an welchen der Planet seine größte und kleinste Entfernung von der Sonne hat, gefunden werden. Eine gerade Linie, wie SM ist der Radius vektor, oder die jedesmalige Weite des Planeten von der Sonne; aber DS oder LS, vom Endpunkte der kleinen Axe zur Sonne, ist seine mittlere Weite. Nun ist diese = $\frac{1}{2}$a = CP oder gleich der halben Absidenlinie (K. §. 24. Zus. 2.), folglich, da man nach §. 44. die mittlere Weite der Planeten kennt, weiß man auch die Größe der Apsidenlinie.

Weil ferner SC = CP — PS; so darf man nur von der bekannten mittleren Weite des Planeten seine

ebenfalls gefundene kleinste Weite PS abziehen, um die Eccentricität der Planetenbahn zu haben. Die am Ende beygefügte Tafel giebt das Verhältniß der Eccentricität SC eines jeden Planeten gegen die halbe große Axe CP, die man = 1 setzt; die Nebencolumne enthält diese in geographischen Meilen, — für die Epoche 1750, indem auch die Eccentricität der Planeten veränderlich ist. Aus dieser Tafel erhellt, daß die Eccentricität der neu entdeckten Planeten sehr groß, aber die der übrigen gegen die halbe Apsidenlinie CP gehalten so gering sey, daß ihre Bahnen wenig von der Kreisform abweichen.

Wenn man ferner die Neigung der Planetenbahn gegen die Ecliptik, und die Lage der Knotenlinie, in welcher die Fläche der Planetenbahn die Ebene der Ecliptik schneidet, weiß; so ist auch die Lage der Bahn des Planeten gegen die Ecliptik oder Erdbahn, und hiedurch auch der Ort seiner Sonnennähe P und Sonnenferne A, mithin auch der Ort D und L, wo der Planet sich in seiner mittleren Entfernung von der Sonne befindet, bekannt.

Auf diese Weise ist man im Stande, die Planetenbahnen vollständig zu verzeichnen, und sie durch Modelle darzustellen.

Zweytes Keplerisches Gesetz.

§. 46. Kepler zog aus vielen Beobachtungen über die Bewegung der Planeten das Gesetz ab: Die Zeiten,

ten, in welchen ein Planet in seiner Bahn durch 2 beliebige Bogen, z. B. AM, OP geht, verhalten sich, wie die Flächen oder elliptischen Ausschnitte AMS, OPS, die zwischen den Bogen enthalten sind. Dieses, in der Physik unter dem Artikel Bewegung allgemein bewiesene, Gesetz drückt man so aus: radius vector verrit areas temporibus proportionales.

Aus diesem Gesetze ist klar, warum der Planet langsamer sich in seinem Aphelium z. B. von A nach M, geschwinder aber im Periphelium z. B. von O nach P, bewege; indessen er nämlich hier durch einen großen Bogen in derselben Zeit, in welcher er dort nur einen kleinen Bogen AM durchläuft, können doch beyde Ausschnitte OPS, AMS gleich seyn. Eben so ist klar, warum der Planet mehr Zeit brauche, die obere Hälfte LAD, als die untere DPL zu durchlaufen. Denn der Ausschnitt LADSL, zum Bogen LAD gehörig, beträgt nebst der halben Fläche der Ellipse auch das Dreyeck DLS, um welches der zu DPL gehörige Ausschnitt DPLSD kleiner ist. Weil endlich der Ausschnitt AOS, dem Bogen AO zugehörig, welchen der Planet durchläuft, bis er von seiner Sonnenferne an, aus der Sonne betrachtet, 90° im Thierkreise zurückegelegt hat, weit größer ist, als der Ausschnitt OPS des Bogens OP, in welchem er wieder 90° durchlauffen hat; so erhellt, daß er zu seinem Weege von der Sonnenferne A durch 90° bis O weit mehr Zeit brauche, als er

nöthig hat, um von ☉ durch 90° bis zur Sonnennähe P zu kommen.

Drittes Keplerisches Gesetz.

§. 47. Das allgemeine Gesetz, welches heut zu Tage ebenfalls in der Physik bewiesen wird: nämlich die Quadrate der periodischen Umlaufszeiten zweyer Planeten verhalten sich, wie die Würfel ihrer mittleren Weiten von der Sonne, oder, in Ansehung der Nebenplaneten, von dem Hauptplaneten; daher die periodischen Umlaufszeiten selbst sich wie die Quadratwurzeln aus den Würfeln der mittleren Entfernungen (der halben großen Axen) der Planeten verhalten"

hat Kepler erst nach 17jährigen Untersuchungen und Vergleichungen über die periodischen Umläufe und Abstände der Planeten im J. 1618 den 15ten May zu seiner großen Freude aufgefunden, nachdem er sich endlich der Potenzen der Zahlen für die Umläufe und Abstände bedient hatte. So ist die Umlaufszeit der Venus = 224 T. 17. St. = 5393 St. für die Erde = 365 T. 6 St. = 8766 St.; die Entfernung jener = 723, dieser = 1000; die Quadrate der 2 ersten Zahlen sind 29084449 und 76842756; die Würfel der 2 letztern sind 377933076 und 1000000000. Setzt man nun die abgekürzten Zahlen in eine Proportion 2908: 7684 = 378: 1000; so sieht man, daß bis auf eine Kleinigkeit die Proportion richtig sey.

Weiß

Weiß man nun, um wieviel später oder früher, als die Erde, ein Planet um die Sonne herumkömmt, z. B. Jupiter 12mal später; so darf man nur, die mittlere Entfernung der Erde = 1 gesetzt, aus 12^2 und überhaupt aus dem Quadrate jener Zahl die Cubikwurzel ausziehen, um die verhältnißmäßige Entfernungen des Planeten zu finden.

Weiß man hingegen, wie vielmal größer oder kleiner die mittlere Weite eines Planeten von der Sonne ist, als die der Erde; so findet man eben so leicht seine Umlaufszeit, indem man aus dem Würfel seiner mittleren Distanz die Quadratwurzel auszieht. So ist für Saturn, dessen mittlere Weite von der Sonne ungefähr $9\frac{1}{2}$ größer, als die der Erde ist, $\sqrt{(9\frac{1}{2})^2} = 29,2$ d. i. in soviel Jahren kömmt Saturn um die Sonne.

Dieses gewisse Gesetz enthält zugleich einen Grund zur Wahrheit des Copernikanischen Systems. Wäre nämlich die Sonne ein Planet, gleich dem Monde um die Erde (in 1 J.) laufend; so würde, da in 1 Jahre der Mond 13 Umläufe um die Erde vollendet, die Sonne 13mal später um die Erde kommen, demnach müßte die Sonne nur $5\frac{1}{2} = \sqrt[3]{13^2}$mal weiter von uns entfernt seyn, als der Mond, da sie doch mit Gewißheit über 400mal weiter weg ist.

Zusatz. Die in den zwey letzten Abschnitten betrachteten Stücke heißen die Elemente der Planetenbahnen. Diese sind in Ansehung der Breite

1. die

1. die Lage der Knotenlinie; 2. die Neigung der Bahn; durch beyde findet man, wenn der heliocentrische Ort bekannt ist, die heliocentrische Breite für jede gegebene Zeit. In Ansehung der Länge hat man die folgenden 4 Elemente: 3. Die Eccentricität der Bahn; 4. den Ort der Sonnenferne; 5. die Epoche des mittleren Ortes, d. i. der mittlere heliocentrische Ort des Planeten für einen bestimmten Augenblick; 6. die mittlere Geschwindigkeit des Planeten, z. B. um wieviel sich sein mittlerer Ort in einer Stunde, einem Tage ... ändere, was man findet, wenn man 360° durch die Anzahl der Stunden, Tage ... seiner Umlaufszeit dividirt. Sind diese 4 letztern Stücke genau bekannt; so kann man aus dem Unterschiede zwischen der Epoche und der gegebenen Zeit, vermöge der mittleren Geschwindigkeit, leicht finden, um wieviel sich in dieser Zwischenzeit der mittlere Ort verändert habe, und wohin er also für die gegebene Zeit falle; dieß mit dem Orte der Sonnenferne verglichen, giebt des Planeten mittlere Anomalie, aus welcher sich mittelst der Eccentricität durch das (folgende) Keplerische Problem die wahre Anomalie, folglich der heliocentrische Ort, oder die heliocentrische Länge für die gegebene Zeit finden läßt.

Das Keplerische Problem.

§. 48. Anomalie überhaupt nennt der Astronom den Abstand eines Planeten von seiner Sonnenferne. Wahre Anomalie nennt er den Winkel ASM, am

Brenn-

Brennpunkte S vom Radius vektor SM und der Apsidenlinie SA gebildet. Eccentrische Anomalie ist der am Mittelpunkte C der Ellipse von der Apsidenlinie und des umschriebenen Kreises Halbmesser CN, welcher aus C zum Endpunkt der durch den Ort M des Planeten gehenden und verlängerten Ordinate FM gezogen ist, gebildete Winkel ACN. Mittlere Anomalie ist der der Umlaufszeit proportionell gesetzte Abstand von der Sonnenferne A. Diese wächst gleichförmig und gleich von A bis P, so, daß, wenn der Planet M in 6 Monaten den Bogen AP durchliefe, diese mittlere Anomalie am Ende des ersten Monates = 30°, am Ende des 2ten = 60° u. s. w., oder ein 12tel, ein 6tel ... (vom ganzen Kreise) seyn würde, so wie auch die entsprechende Zeit $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$ ... von der ganzen Umlaufszeit des Planeten wäre. Diese Anomalie würde die wahre seyn, wenn die Sonne in C, und der Planet im Kreise, folglich mit gleichförmiger Geschwindigkeit gleichsam an der Linie CX herumgeführt würde. Da sich aber der Planet in der Nähe des Aphelinus langsamer bewegt; so wird CX in derselben Zeit schon weiter gegen P her gerückt seyn, als CN. Dann wird aber der Punkt N immer näher an X rücken, bis sie in P zusammenkommen, und alle Anomalieen sich in einander verlieren, oder jede = 180° wird. Den Unterschied zwischen der wahren und mittleren Anomalie nennt man die Gleichung der Bahn, oder Mittelpunktsgleichung. Weil ferner die mittlere

lere Anomalie der Zeit proportional ist; so kann sie durch jede gleichförmig wachsende Größe gemessen werden, so, daß man also nicht nur den Bogen AX, oder den Winkel ACX, oder den Kreisausschnitt ACX, sondern auch den elliptischen Ausschnitt ASM die mittlere Anomalie nennen kann. Denn diese Ausschnitte sind nach dem zweyten Keplerischen Gesetze alle der Zeit proportionell. So ist nach obiger Voraussetzung ASM der 12te Theil der ganzen elliptischen Fläche am Ende des ersten Monates; am Ende des 2ten wird er der 6te seyn u. s. w.

Nun kann man aber aus der gegebenen kleinen und großen Axe der Ellipse leicht ihren Flächeninhalt finden (K. §. 72.); aus diesem aber jenen elliptischen Ausschnitt, welchen der Radius vektor täglich beschreibt, indem man nur den ganzen Flächeninhalt durch die ganze Umlaufszeit dividirt. Multiplizirt man dann diesen täglichen Ausschnitt durch die Anzahl der Tage . . ., welche von dem Augenblicke an, wo der Planet in A war, bis zu dem verflossen sind, für welchen man die Größe des Ausschnittes verlangt; so hat man diese Größe für diese bestimmte Zeit, oder die mittlere Anomalie. Demnach kann diese immer als gegeben oder bekannt betrachtet werden. Vermöchte man nun aus der mittleren Anomalie jedesmal die wahre, oder den Winkel ASM zu finden; so würde man hieraus leicht den heliocentrischen Ort M für jeden Tag finden können. Denn der elliptische Bogen AM erscheint im

Thier-

Thierkreise, aus der Sonne S gesehen, als ein Kreisbogen, welcher den dem Ausschnitte AMS zugehörigen Winkel ASM zum Maße hat. Die Wichtigkeit der letzten Aufgabe machte, daß Kepler die Auflösung jener ersten, oder der Aufgabe: Aus der gegebenen mittleren Anomalie die wahre zu finden" den Astronomen vorlegte.

Indirekte Auflösung des Keplerischen Problems und desselben Anwendung.

§. 49. Wegen der Schwierigkeit einer direkten Auflösung dieser Aufgabe verwandelten die Astronomen dieselbe in die indirekte des Problems: Aus der als bekannt vorausgesetzten wahren Anomalie die mittlere zu finden. Kömmt diese gefundene mittlere Anomalie mit der nach §. 48. leicht zu findenden überein; so ist die vorausgesetzte wahre Anomalie die gesuchte; wo nicht, muß an der Voraussetzung so lange geändert werden, bis beyde mittleren Anomalieen dieselben sind. Diese umgekehrte Aufgabe löst man auf folgende Weise:

1. Hilfssatz. Wenn CX die Linie der mittleren Anomalie; M der wahre Ort des Planeten, und FMN die durch diesen Ort gehende Ordinate ist; so ist der Kreisausschnitt ANSA = dem Kreisausschnitte ACX der mittleren Anomalie.

Beweis. Nennt man die ganze Umlaufszeit T; die Zeit, bis der Planet von A nach M kömmt t; die

Fläche der Ellipſe s, und die des Kreiſes S; ſo iſt nach dem vorigen T: t = s: AMS, und weil der Ausſchnitt ACX die mittlere Anomalie iſt, T: t = S: ACX, folglich AMS: ACX = s: S. Aber AMS: ANS = s: S, woraus ACX = ANS folgt.

2. Hilfsſatz. In jedem rechtwinkligen Dreyecke MFS iſt die Tangente des halben Winkels $FSM = \frac{FM}{FS + SM}$.

Beweis. Man mache SB = SM; ſo iſt $B = \frac{1}{2}$ FSM; aber FB: FM = 1: tang. B, alſo tang. $B = \frac{FM}{FB} = \frac{FM}{FS + FB} = \frac{FM}{FS + SM}$.

3. Hilfsſatz. Der Radius vektor SM iſt $= \frac{PF \cdot \frac{SA}{CA}}{} - SF$.

Beweis. Wenn man CA = a, alſo AP = 2a; CF = u, und CS = e ſetzt; ſo iſt jener Ausdruck $= \frac{(a + u)(a + e) - a(e + u)}{a} = \frac{a^2 + eu}{a}$, d. i. derſelbe Ausdruck, welchen wir im §. 24. d. Kegelſchn. Zuſ. 1. für FM entwickelten, wenn wir, wie wir hier thaten, a für 2a ſetzen.

4. Satz. Die Tangenten der halben wahren und halben eccentriſchen Anomalie ſind im ſubduplicirtem Verhältniße der Abſtände von der Sonnennähe und Sonnenferne.

Beweis. In den rechtwinkligen Dreyecken MSF und NCF ist nach Satz 2. tang. $\frac{1}{2}$ MSF : tang. $\frac{1}{2}$ NCF $= \frac{FM}{SF + SM} : \frac{FN}{CF + CN}$. Aber nach §. 20. d. Kegelschn. Zus. 6. kann man auch für FM : FN setzen CD : CA; aus Satz. 3. wird $SF + SM = PF. \frac{SA}{CA}$; setzt man endlich PF statt CF + CN; so geht das letzte Verhältniß obiger Proportion in dieses: $\frac{CD}{PF.} \frac{CA}{SA} : \frac{CA}{PF}$ oder in CD : SA über; oder, weil $CD = \sqrt{(SD^2 - CS^2)} = \sqrt{(a^2 - e^2)} = \sqrt{(a+e)}\sqrt{(a-e)}$; so hat man statt CD : SA das Verhältniß $\sqrt{(a^2 - e^2)} : a + e$, woraus durch Division mit $\sqrt{(a+e)}$ wird $\sqrt{(a-e)} : \sqrt{(a+e)}$, d. i. $\sqrt{PS} : \sqrt{SA}$; also ist die zu beweisende Proportion wahr.

5. Satz. Der Unterschied NX zwischen der eccentrischen Anomalie AN und der mittleren AX ist gleich dem Produkte aus der Eccentricität in den Sinus der eccentrischen Anomalie ACN.

Beweis. Der Kreisausschnitt ANSA ist = dem Ausschnitte der mittleren Anomalie ACX (d. Satz. 1.); nimmt man nun von beyden ACN weg; so bleibt der Sektor NCX = △ CNS. Aber der Flächenraum von NCX gleicht dem Produkte aus CN in den halben Bogen NX, der Flächenraum des △ CNS gleicht dem

Pro-

Produkte aus CN in die halbe Höhe ST, d. i. CN. NX = CN. ST, folglich der Bogen NX = S'I'. Nun ist im △ S'TC ST = CS. sin. TCS, also auch NX diesem gleich, oder NX = CS. sin. ACN.

Man pflegt indessen alle Anomalieen der Planeten in Minuten und Sekunden auszudrücken; daher, um den vorigen Unterschied in diesen anzugeben, muß man auch die Eccentricität in Min. oder Sek. ausdrücken.

Man sieht übrigens leicht ein, wie man mit Hilfe der beyden letzten Sätze im Stande ist, die mittlere Anomalie aus der gegebenen wahren, und folglich diese selbst zu finden.

Hat man aber diese gefunden; so kann man den Abstand des Planeten von der Sonne oder den Radius vektor SM durch die Proportion finden: Der Sin. der wahren Anomalie verhält sich zum Sin. der eccentrischen, wie die halbe kleine Axe zum Radius vektor.

Denn zieht man NQ || MS; so ist wegen der ähnlichen Dreyecke SM: QN = FM: FN = CD: CK oder CN; also SM: CD = QN: CN = sin. QCN: sin. CQN = sin. FCN: sin. FSM; also sin. CSM: sin. NCS (oder sin. NCF) = CD: SM. Mittelst dieser Proportion kann man die Tabellen der Abstände der Planeten für jeden Grad der Anomalie berechnen.

Eine andere Proportion, worin PS bekannt seyn muß, lernten wir im §. 16. d. Kegelsch. Zus. 2. in Ansehung der Cometen kennen.

Fünfter Abschnitt.

Von den Cometen.

Die Bewegung der Cometen.

§. 50. Die Cometen scheinen sich, wie alle Sterne, täglich um die Erde zu drehen, wobey ihnen auch, gleich den Planeten, eine eigenthümliche Bewegung zukömmt, indem sie immer bey andern Fixsternen erscheinen. Bey dieser Bewegung halten sie nicht, wie die Planeten, einerley Richtung von Westen nach Osten; sondern einige laufen nach dieser, andere nach jener Himmelsgegend, so, daß sie sich nach allen Richtungen hinbewegen. Auch sind sie nicht am Thierkreise, wie die Planeten, gebunden.

Ferner durchläuft zuweilen ein Comet während seiner Sichtbarkeit sehr große Bogen am Himmel, wie der Comet von 1769, welcher einen Bogen 240° durchlief; zuweilen verändert er seinen Ort am Himmel nur sehr wenig. Eben so ist zuweilen die Bewegung äußerst schnell: der Comet von 1760 durchlief in 1 Tage 41°½; zuweilen äußerst langsam.

Die-

Diese so äußerst unregelmäßig scheinende Bewegung der Cometen war Ursache, daß man ihre Bahnen bald für Kreislinien, bald für gerade Linien hielt. Hevelius zeigte zuerst 1668 in seiner Cometographie, daß die Cometenbahn einer Parabel nahe komme. Newton schloß aus seiner allgemeinen Theorie der Kräfte, daß sich die Cometen in länglicht schmalen Ellipsen, oder, so weit sie sichtbar seyen, in Parabeln (welche von sehr länglichten Ellipsen sehr wenig unterschieden sind (K. §. 20. Zus. 5.) bewegten, was er auch am Cometen von 1681 bestättigt fand. Nach diesen Grundsätzen hat Halley für 24 Cometen die Elemente ihrer Bahnen in seiner Cometographie 1705 bekannt gemacht. Heut zu tage betrachten die Astronomen die Cometenbahnen durchaus als Parabeln, weil dadurch der Calcul für jene sehr erleichtert wird. Denn da alle Parabeln ähnlich sind (K. §. 58.); so geben sie für ähnlich liegende Radien vektoren immer einerley Proportion, und weiß man die Abstände einiger Cometenbahnen von der Sonnennähe; so kann man sie alle durch dieselbe Tabelle berechnen. Ellipsen aber fordern für jeden einzelnen Weltkörper eine eigene Tabelle.

Eine allgemeine Tabelle für die paraboliſchen Cometenbahnen zu konstruiren.

§. 51. Bey dieser Konstruktion wird vorausgesetzt, daß die Sonne im Brennpunkte der vom Cometen beschriebenen Parabel PCOD (Fig. 48.) sey, deren

Schei-

Scheitel P die Sonnennähe ist, und daß der Abstand SP des Cometen von dieser Sonnennähe gleich sey dem mittleren Abstande TS der Erde T von der Sonne S, welchen man allen himmlischen Abständen zum Grunde zu legen pflegt. Der Comet mit diesem Abstande braucht, wie sich gleich ergeben wird, ungefähr 109 Tage, um von P bis O, d. i. bis zum Endpunkte der Ordinate SO, welche auf SP senkrecht ist, zu kommen. Man nennt ihn daher nur den Cometen von 109 Tagen; er vertritt gleichsam die Stelle aller übrigen Cometen, wenn man nur die Zeiten ändert.

Zuerst ist nun die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit welcher verschiedene Parabeln durchlaufen werden, indem in einer größeren Parabel ein Weltkörper mehr Zeit braucht, um einen Winkel von 90°, wie PSO, zu durchlaufen, oder von P nach O zu kommen. Zu dieser Bestimmung dient

1) der Satz: Die Geschwindigkeit in der Parabel verhält sich zur Geschwindigkeit im Kreise, wie $\sqrt{2}$: 1.

Beweis. Es beschreibe die Erde in T den Kreis TLM, dessen Halbmesser TS = SP, während der Comet von P aus die Parabel PO durchlaufe. Da nun die Sonne wegen der gleichen Abstände gleich auf die Erde und den Cometen wirkt; so werden, wenn wir die unendlich kleinen Stücke PC, TL ihrer Bahnen betrachten, die Abscissen PB, IT, um welche Theile die Sonne

beyde

beyde Weltkörper gegen sich, oder von der Tangente, wie PA, abzuziehen strebt, gleich seyn. Es drücken demnach die in gleichen Zeiten durchlaufenen Bogen PC und TL die Geschwindigkeiten des Cometen und der Erde aus.

Nun ist das Quadrat der Ordinate IL = TI multiplizirt in den übrigen Theil des Durchmessers, den wir Is nennen wollen (§. 3. d. Einl. in d. K.). Weil aber TI unendlich klein ist; so können wir Is als den ganzen Durchmesser = 2ST betrachten, so, daß also die Abscisse oder der Quersinus $TI = \frac{IL^2}{2ST}$ wird. In der Parabel ist $y^2 = px$, oder $BC^2 = PB.\ p$ (K. §. 5.), aber $p = 4SP$ (das. Zus. 5.); folglich $PB = \frac{BC^2}{4SP} = \frac{BC^2}{4ST}$; daher, weil $TI = PB$, auch $\frac{IL^2}{2ST} = \frac{BC^2}{4ST}$, oder $2IL^2 = BC^2$, woraus $BC : IL = \sqrt{2} : 1$. Weil nun die Stücke der Bahnen unendlich klein gesetzt wurden; so drücken auch statt dieser BC und IL die Geschwindigkeiten aus, diese sind also im angegebenen Verhältniße.

Zusatz. Nun ist $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ beynahe, folglich ist die Geschwindigkeit des Cometen in P in der Parabel PO $\frac{7}{5}$ der Geschwindigkeit der Erde; demnach auch der vom Cometen in 1 Zeitsekunde beschriebene Flächenraum $= \frac{7}{5}$ des von der Erde in derselben Zeit beschriebenen

Flä-

Flächenraumes. Aber diese Flächenräume sind in gleichen Zeiten immer gleich; folglich, in welchem Abstande von der Sonne sich der Comet in seiner Bahn befinden mag, ist jedesmal der von ihm in 1″ durchlaufene Raum $\frac{7}{5}$ des von der Erde beschriebenen Raumes, und dieser gleicht dem vom Cometen beschriebenen, mit $\frac{7}{5}$ oder $\sqrt{2}$ dividirt.

Setzt man also den Abstand von der Sonnennähe SP oder ST = 1 und die Peripherie des Kreises TM oder die Zahl 6, 283 ... (S. §. 140.) = π; so ist die Kreisfläche = $\frac{\pi}{2}$ (S. §. 143.). Die parabolische Fläche PSO, welche $\frac{2}{3}$ des Produkts SP. SO (K. §. 69.), welches aber = 2 ist (indem $y^2 = SO^2 = px = 4ST = 4$), gleicht $\frac{4}{3}$, folglich wird der Flächenraum, welchen die Erde während der Zeit, bis der Comet von P nach O kömmt, beschreibt, durch $\frac{4}{3.\sqrt{2}}$ ausgedrückt. Nennt man also die Dauer des Sternjahres A; so verhält sich die ganze Fläche der Erdbahn $\frac{\pi}{2}$ zum Flächenraume $\frac{4}{3.\sqrt{2}}$, wie A zu der diesem letztern Flächenraume entsprechenden Zeit; welche also = $\frac{8A}{3\pi.\sqrt{2}}$ = 109 T. 14 St. 46′ 12″, 6 gefunden wird, wenn man A = 365 T. 6 St. 9′ 12″ = 365′ 256370 T. setzt, und das Ganze logarithmisch behandelt.

delt. Soviel Zeit braucht demnach der Comet, um den parabolischen Bogen PO oder 90° der wahren Anomalie zu durchlaufen, unter der Voraussetzung, daß der Abstand von der Sonnennähe gleich sey dem Abstande der Sonne von der Erde.

Allein es ist nicht genug, die zum Durchlaufen dieser 90° wahrer Anomalie nöthige Zeit zu wissen, sondern, um den Ort des Cometen für jede Zeit zu berechnen, muß man die Zahl der Tage ... kennen, welche jedem Stücke der Parabel, wie PD, oder jedem Winkel wahrer Anomalie, von der Sonnennähe an gerechnet, entspricht; wobey immer die Flächenräume den Zeiten proportional sind. Man hat also

2) die Aufgabe: Aus der bekannten wahren Anomalie in einer Parabel die seit der Sonnennähe verflossene Zeit zu finden

aufzulösen. Man setze, die Parabel PCOD sey gegeben, d. i. der Abstand SP und die zum Durchlaufen des Bogens PO nöthige Zeit sey bekannt; man soll nun die Zeit finden, die der Comet zum Durchlaufen eines anderen Bogens PD, oder anderen Winkels PSD wahrer Anomalie braucht. Man ziehe nun DP, mache SE und SR = dem Radius vektor DS, und ziehe DR, DE; so wird DR die Normale und DE die Tangente der Parabel seyn (K. §. 12. Zus.). Setzt man nun die Subnormale RQ = 1; so ist der Parameter = 2 (K. §. 12.); $PQ = \frac{DQ^2}{2}$ (wegen $y^2 = px$),

px), und das parabolische Segment PSDOP $= \frac{1}{12} DQ^3 + \frac{1}{4} DQ$ (K. §. 70.).

Zieht man ferner SX || RD; so wird dadurch der W. DSE halbirt, und da RQ = 1 gesetzt ist, RD die Tangente von QRD, oder von $\frac{1}{2}$ DSE, d. i. die Tangente der halben wahren Anomalie. Nennt man also diese Tangente t; so ist der Flächenraum PSDOP $= \frac{t^3}{12} + \frac{t}{4}$, und weil für 45° t = 1 (T. §. 17. Zus. 3.), der Flächenraum von 90° PSO $= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$. PSO ist aber hier als Einheit angenommen, daher muß man den Ausdruck für PSDOP mit 3 multipliziren, wodurch dieser $= \frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4}$ wird; denn es verhält sich $\frac{t^3}{12} + \frac{t}{4} : \frac{1}{3} = \frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4} : 1$. Demnach muß man, da der Flächenraum von 90° bekannt, und t die Tangente der halben wahren Anomalie ist, den Flächenraum von 90° durch $\frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4}$ multipliziren, um den vom Cometen seit seines Durchganges durch die Sonnennähe beschriebenen Flächenraum zu haben. Aber die Flächenräume sind den Zeiten proportional, also erhält man die dem parabolischen Bogen PD entsprechende Zeit, indem man 109 T. oder die Zeit von 90° mit dem vierten Theile von $t^3 + 3t$ multiplizirt.

Beyspiel. Ein Comet, welcher 109 T. braucht, um 90° wahrer Anomalie zu durchlaufen, habe 47° wahrer Anomalie, wie viel Tage werden seit seines Durchganges durch die Sonnennähe verflossen seyn? Weil $t = \text{tang. } 23°\frac{1}{2} = 0,4348124$, und $t^3 = 0,0822$, $\frac{t^3 + 3t}{4} = 0,3467$; so findet man 38 T. $= 109 . 0,3467$.

Auf diese Weise kann man für jeden Grad wahrer Anomalie die entsprechende Zeit finden, folglich für den Cometen von 109 T. eine allgemeine Tafel verfertigen, welche man dann auf alle Cometen anwenden kann. Denn betrachtet man Cometen in andern Parabeln, aber in demselben Grade wahrer Anomalie; so verhalten sich die seit dem Durchgange durch die Sonnennähe verflossenen Zeiten zu einander, wie die Zeiten, welche sie brauchen, um von der Sonnennähe einen Bogen von 90° zu durchlaufen; ist z. B. $\frac{t^3 + 3t}{4} = \frac{1}{2}$; so ist die Zeit die Hälfte der Zeit für 90° in allen möglichen Parabeln. Weiß man also für irgend einen Cometen die 90° wahrer Anomalie entsprechende Zeit; so kann man, indem man sich der Tabelle für den Cometen von 109 T. bediente, durch eine einfache Proportion die jedem andern Winkel wahrer Anomalie entsprechende Zeit finden.

Es kömmt also nunmehr nur darauf an, die Zeit für 90° in Ansehung größerer oder kleinerer Parabeln,

oder die Anzahl der Tage zu finden, welche einem Bogen PO entsprechen, wenn der Abstand SP von der Sonnennähe nicht mehr gleich ist der mittleren Distanz der Erde von der Sonne. Diese Aufgabe löst man

3) durch den (dem dritten Keplerischen Gesetze analogen) Satz: die Quadrate der Zeiten, welche derselben wahren Anomalie in verschiedenen Parabeln entsprechen, sind wie die Würfel der Abstände von der Sonnennähe.

Daß dieses Gesetz, welches in Ansehung solcher Körper, welche in Kreisen, oder in sehr kleinen elliptischen Bogen sich bewegen, sehr leicht zu beweisen ist, auch für Parabeln gültig sey, sieht man so ein: Wir haben oben im 1ten Satze bewiesen, daß, wenn die Erdbahn in 365 T. durchlaufen wird, der 4te Theil der Parabel, oder ein parabolischer Bogen von 90° in 109 T. durchlaufen werde. Es ist also die Zeit der Parabel fast $\frac{3}{10}$ der Zeit des Kreises. Hat man aber verschiedene Kreise, oder verschiedene Cometen mit andern Abständen von der Sonne; so verhalten sich die Quadrate ihrer Umlaufszeiten, wie die Würfel dieser Abstände; nun sind von diesen Umlaufszeiten die Zeiten der Parabeln immer $\frac{3}{10}$, folglich gilt für die Parabeln dieselbe Proportion.

So leuchtet ein, wie eine einzige Tabelle zur Auffindung der wahren Anomalie in allen Parabeln dienen könne, indem man nur nach dem vorigen Satze die Zeiten ändert. Diese ändern sich aber bey demselben Gra-

de

de wahrer Anomalie im Verhältniße der Quadratwurzeln aus den Würfeln der Abstände von der Sonnennähe. Entsprechen also 90° wahrer Anomalie 109 T. beym Abstande 10; so werden für dieselbe Anomalie 126 T. beym Abstande 11 nöthig seyn. Sucht man daher aus der Tabelle für den Cometen von 109 T. die Anomalieen für den von 126 T.; so wird man die dortigen Zahlen immer in jenem Verhältniße vermehren müssen. Daraus ist die beygefügte Tabelle für 11 verschiedene Parabeln verständlich. Ist z. B. der Abstand eines Cometen von der Sonnennähe P $\frac{4}{10}$ des Abstandes der Erde von der Sonne; so muß man statt der Zahlen der allgemeinen Tabelle von diesen Zahlen nur 0,25 oder $\frac{1}{4}$ nehmen; daher braucht dieser Comet, dessen Abstand von P ist 4, nur 28 Tage, um PO oder 90° wahrer Anomalie zu durchlaufen.

Abst. v. d. Sonnennähe in $\frac{1}{10}$ des Abst. d. ☿ v. d. Sonne.	Faktoren der Täge der Taf.	Tage für 90°
1	0, 035	3, 5
2	0, 089	9, 8
3	0, 164	18, 0
4	0, 253	27, 7
5	0, 353	38, 8
6	0, 475	50, 9
7	0, 585	64, 2
8	0, 715	78, 4
9	0, 854	93, 6
10	1, 000	109, 6
11	1, 152	126, 3

Man kann aber auch umgekehrt aus der Zahl der Tage, in welchen ein Comet von seiner Sonnennähe fortgerückt ist, die Grade des Bogens finden, durch welche er mittlerweile gelaufen ist. Denn da man aus dem Bogen für die Zahl der Tage größtentheils einen Decimal-

malbruch findet, so darf man nur schließen: die Zahl der vollen Tage mit diesem Bruche giebt den angenommenen Bogen, was für einen Bogen geben die vollen Tage. So z. B. durchläuft der Comet von 18 T. in 6, 23 T. einen Bogen von 47° oder 2820′, wie viel Grade durchläuft er in vollen 6 Tagen? wo man 45° 15′ findet.

Elemente der Cometenbahnen.

§. 52. Diese sind 1) der Ort der Sonnennähe P; 2) der Zeitpunkt des Durchganges durch P; 3) der Abstand PS des Cometen von der Sonne in der Sonnennähe; 4) die Lage der Knotenlinie; 5) die Neigung seiner Bahn; 6) die Richtung des Laufes, ob er nämlich, wie bey den Planeten, der Ordnung der Zeichen des Thierkreises folge, oder denselben entgegengehe.

Hat man diese Elemente für einen Cometen aus Beobachtungen seines Laufes bestimmt, und findet nach mehreren Jahren einen neuen Cometen, aus dessen Laufe eben dieselben Elemente folgen; so muß man schließen, daß dieser neue kein anderer, als der wiedererscheinende vorige sey, indem man nicht annehmen kann, daß sich 2 verschiedene Weltkörper in derselben Bahn bewegen. Auf diese Art hat schon Halley geschlossen, daß der Comet der Jahre 1531, 1607, 1682 nur ein einziger alle 75—76 Jahre zurückekehrender sey, weil er dreymal mit fast eben denselben Elementen wiedererschienen

war. Nochmals erschien er wirklich 1759 fast mit denselben Elementen.

Aus dieser Wiederkehr ist deutlich, daß die Bahn dieses Cometen keine eigentliche Parabel, sondern eine Ellipse sey, welche man auf folgende Art bestimmen und verzeichnen kann: Die Cubikwurzel aus dem Quadrate seiner Umlaufszeit (= 76 J.) ist 18; also ist nach dem 3ten Keplerischen Gesetze seine mittlere Weite BS (Fig. 49.) von der Sonne, oder die halbe große Axe CP seiner Bahn 18mal größer, als die Weite der Erde von der Sonne. Nun hat man das 3te Element dieses Cometen nämlich PS = $\frac{58}{100}$ der Distanz der Erde von der Sonne, d. i. = 12 Millionen Meilen gefunden, folglich ist seine Eccentricität CS beynahe $17\frac{1}{2}$mal größer, als der Abstand der Erde von der Sonne. Hat man aber die große Axe, oder ihre Hälfte, und die Eccentricität; so findet man hieraus die kleine (K. §. 22. II.). Bey unserem Cometen ist nun die halbe kleine Axe CB 4mal kleiner, als CP, also seine Bahn 4mal so lang, als breit; und wenn er in seiner Sonnenferne A ist; so ist er von der Sonne $35\frac{1}{2}$mal weiter weg, als die Erde; also fast 2mal weiter als Uranus; er geht also von der Sonne mehr als 731 Mill. M. weg, und in A ist er 61mal weiter von ihr, als in P. Die Bahn dieses Cometen ist also sehr länglicht, und die Sonne steht vom Mittelpunkte derselben über 360 Mill. M. ab; also fast so weit, als sie vom Uranus absteht.

Zu-

Zugleich erhellt, daß dieser, wie die übrigen Cometen, sich in der Sonnennähe äusserst schnell, aber in der Sonnenferne äusserst langsam bewegen müsse; daher viele erst nach Jahrhunderten ihre Bahnen vollenden und wieder erscheinen können. So wird, wenn Newton's Berechnung der Bahn des großen Cometen von 1680, dessen Schweif 70° lang war, und der überal Schrecken verbreitete, richtig ist, erst im J. 2255 wieder zu erwarten seyn, indem er erst in 575 J. seinen Lauf um die Sonne vollendet. Die von Georg Samuel Dörfel (Prediger zu Plauen im Vogtlande) über eben diesen Cometen angestellten Beobachtungen waren es, welche ihn zuerst auf die Entdeckung brachten, daß die beobachtete Bahn dieses Cometen eine Parabel sey, in deren Brennpunkte die Sonne stehe.

Die Größe, Anzahl der Cometen, Vermuthungen über ihre Natur, und ob diese Weltkörper zu fürchten seyen.

§. 53. Die Betrachtungen der Bahnen der Cometen läßt keinen Zweifel übrig, daß diese eigentlich mit zur Klasse der Planeten gehören, und ihre retrogradscheinende Bewegung ist auf dieselbe Art, wie bey den übrigen Planeten zu erklären. Auch sind die Cometen, wie die Planeten, an sich dunkle Körper, indem sie, wie diese, nicht nur kein funkelndes Licht haben, sondern auch, wie der Comet von 1744 halb erleuchtet, und mit hellerem Schweife erscheinen, so wie sie der Sonne näher kom-

kommen. Ferner weiß man nun, daß viele der Cometen einigen Planeten an Größe nichts nachgeben. So mußte der von Tycho 1577 beobachtete Comet viel größer seyn, als die Venus, indem er bey einem viel größeren Abstande von der Erde doch noch einmal so groß erschien, als die Venus.

Die Anzahl der Cometen ist noch nicht ausgemittelt. Aber Lambert bringt nach einem sehr mäßigen Ueberschlage in seinen cosmologischen Briefen schon an 4000 Cometen heraus. Dadurch wird denn die Größe unseres Sonnengebietes merklich erweitert.

Die Meinungen über die Natur der Cometen war sehr verschieden. Die Pythagoräer, Demokrit und andere muthmaßten schon ihre immerwährende Bewegung in regelmäßigen Bahnen. Am erhabensten über diese Weltkörper drückt sich Seneca (Quaest. nat. VII. 13.) aus: Cometas, sagt er, sidera esse cum mundo duratura, quanquam legibus nondum compertis regantur, haec tam occúlta dies extrahet, ac longioris aevi diligentia, cui admirationi erit, haec veteres nescire potuisse, postquam demonstraverit aliquis naturae interpres, in quibus coeli partibus cometae errent, quanti qualesque sint. Aristoteles aber und Ptolomäus hielten die Cometen blos für Meteore unseres Luftkreises; selbst Tycho, der diese Meinung aus der beobachteten großen Entfernung dieser Himmelskörper widerlegt fand, hielt

sie

sie noch für bald wieder vergängliche Körper; Kepler, der den Cometen von 1618 sah, hielt sie für neu entstandene Erzeugungen, die im Himmelsraume, wie die Fische im Meere, schwimmen, um den Raum auszufüllen; — Hevelius glaubte, sie seyen Theile aus anderen Planeten, welche in einem parabolischen Bogen, gleich geworfenen Körpern, im Weltraume fortgeschleudert würden.

Der den Cometen umgebende Nebel ist nach Newton wahrscheinlich seine Atmosphäre, welche ungemein dicht ist, und sich weit über ihn erhebt. Nimmt man nun an, daß die Oberfläche des Cometen mit viel phosphorartiger und elektrischer Materie angefüllt sey; so wird diese in der Sonnennähe aufgelöst, und durch die zunehmende Stärke der Sonnenstralen durch die Atmosphäre, deren Elasticität zugleich vermehrt, deren Dichtigkeit hingegen vermindert wird, hinter dem Cometen zu sehr großen Weiten fortgetrieben. So kann sich des Cometen Schweif bilden, welcher daher, wie Appian zuerst bewiesen hat, beständig von der Sonne abgekehrt ist, und wegen der glänzenden Materie, die ihn ausmacht, auch in der größten Entfernung noch so lebhaft aussieht, und so fein ist, daß er das Licht der Sterne durchläßt. Euler setzt zur Erklärung der Entstehung des Schweifes noch die Anprallung des Lichtes, und Mairan das Zodiakal-Licht oder die Sonnenatmosphäre hinzu. Entfernt sich der Comet von der Sonne; so kehren die in seiner Atmosphäre vorher aufgelösten

Dün-

Dünste, wie jene aufgelöste Materie seines Schweifes wieder nach und nach zur Oberfläche des Cometen zurücke.

Durch diese genauere Kenntniß der Cometen wird aller Aberglaube, welcher sonst rücksichtlich dieser Weltkörper statt hatte, und nicht selten Furcht und Schrecken verbreitete, gänzlich zernichtet. Allein die Furcht, eben dieselben möchten dadurch, daß sie der Erde zu nahe kommen, auf dieser Verheerungen, oder wohl gar eine in ihren Folgen nicht zu berechnende Erschütterung hervorbringen, ist keineswegs grundlos. Sollte z. B. ein Comet von der Größe der Erde dieser auch nur auf 13290 Meilen nahe kommen; so könnte er durch seine Anziehungskraft die Wässer des Oceans auf 2000 Toisen heben, und so eine allgemeine Ueberschwemmung verursachen. Auch könnte durch dieselbe Kraft eines nahen Cometen die Erde aus ihrer Bahn einigermaßen verrückt werden. Allein um beydes zu bewirken, müßte angenommen werden, daß der Comet längere Zeit in jener Nähe verharrte, was nicht sehr wahrscheinlich ist, indem er sich, ist er zugleich in der Sonnennähe, fast anderthalbmal geschwinder, als die Erde, bewegt; er würde folglich in einer Sekunde schon 2, in 1′ 120, und in 1 St. 7200 Meilen vorbeylaufen; so würden sie sich denn, Comet und Erde, bald wieder von einander entfernen, und die etwa gehobenen Wässer würden, noch ehe sie schreckliche Verheerungen verbreitet hätten, wieder zurückesinken.

Soll-

Sollte aber gar jene gewaltsame Erschütterung der Erde von einem der Cometen, wovon 7 — 8 nach Lalande's Behauptung der Erde ganz nahe kommen können, bewirkt werden; so müßten 3 Umstände zu gleicher Zeit zusammentreffen; es müßte nämlich einer der Knoten des Cometen genau im Umfange der Erdbahn liegen, und im nämlichen Augenblicke, wo der Comet in diesem Knoten wäre, müßte auch die Erde in ihrer Bahn daselbst ankommen. Allein die Vereinigung dieser 3 Umstände für denselben Augenblick ist sehr unwahrscheinlich.

Der

Der theorischen Astronomie physischer Theil.

Erster Abschnitt.

Von den Gesetzen der Bewegungen in Curven.

Fig. 50.

§. 54. Lehrsatz. Wird ein Körper von zwey unähnlichen Kräften, wovon die eine eine gleichförmige, die andere eine ungleichförmige Bewegung hervorbringt, nach solchen Richtungen zugleich getrieben, welche einen Winkel einschließen; so beschreibet der Körper eine Curve, und zwar eine reguläre Curve um denjenigen Punkt S, gegen welchen der bewegte Körper A von der Centripetalkraft beständig getrieben wird, während er vermöge der Wurf- oder Tangentialkraft immer nach der Tangente zu entfliehen strebt.

Beweis. Vermöge der Wurfkraft, deren Größe die Linie AB vorstellt, komme der Körper im ersten Zeittheile nach B; so würde er im zweyten gleichen Zeittheile mit gleichförmiger Bewegung nach c kommen, so daß der Raum Bc = AB wäre. Allein durch die Einwir-

wirkung der Centripetalkraft, deren Maß wir durch BV vorstellen, wird er abgelenkt, kömmt daher nach C. Wirkt nun wieder die Tangentialkraft alleine; so geht der Körper nach d; er wird sich also wegen der Centripetalkraft, die wir uns am Ende des 2ten Zeittheiles wirkend vorstellen, nicht in d, sondern in D befinden, u. s. w. Denkt man sich nun die Zeit in unendlich kleine Theile getheilt; so sieht man ein, daß der Weeg des bewegten Körpers A eine um S, als der Kräfte Mittelpunkt, beschriebene reguläre Curve seyn müsse.

Wenn z. B. ein Körper in irgend einer andern, als zum Horizonte senkrechten, Richtung geworfen, folglich von der Wurfkraft zur gleichförmigen, aber von der in parallelen Richtungen wirkenden Schwerkraft zur gleichförmig beschleunigten Bewegung sollicitirt wird; so wird derselbe eine Parabel beschreiben.

Fig. 51.

Denn die in gleichen Zeittheilen vermöge der allein wirkenden Wurfkraft durchlauffenen Räume sind gleich, d. i. AE = EG = GI = IB. Allein die Räume, welche der Körper vermöge der Schwere allein gleichsam am Ende jedes Zeittheiles durchlaufen würde, wo er in E, G, I, B, von der Wurfkraft allein getrieben, angekommen wäre, sind EF = AL; GH = AM; IK = AN etc. Demnach befindet sich der von beyden Kräften zugleich getriebene Körper während seiner Bewegung in den Punkten F, H, K, D. Nun sind dieß

aber

aber lauter Punkte einer Parabel. Denn die Räume AE, AG, AI, AB verhalten sich, wie 1: 2: 3: 4; aber die vermöge der Schwere, beym freyen Falle der Körper, durchlauffenen Räume sind, wie die Quadrate der Fallzeiten, d. i. wie $1^2 : 2^2 : 3^2 : 4^2$. Daher verhalten sich AL, AM, AN . . . auch wie die Quadrate der Linien LF, MN, NK, d. i. die Quadrate der Ordinaten des Durchmessers AO verhalten sich, wie die entsprechenden Abscissen LF, MN . . .; also ist die beschriebene Curve eine Parabel (K. §. 19.).

Würde demnach der Körper in einer mit dem Horizonte parallelen Richtung HR geworfen; so würde er eine halbe Parabel HD, deren Axe HT ist, beschreiben.

§. 55. Lehrsatz. Die vom Radius vektor SA (Fig. 50.) beschriebenen Flächenräume SBA, SCB . . . sind den Beschreibungszeiten proportional.

Beweis. $\triangle$ SBA $=$ $\triangle$ BSc wegen derselben Grundseite SB, und weil sie innerhalb derselben Parallelen SB, Cc liegen. Aus demselben Grunde ist auch $\triangle$ BSc $=$ $\triangle$ SCB, u. s. w.; folglich sind die Flächenräume SBA, SCB . . . einander gleich; aber auch die Beschreibungszeiten gleich (§. 54.), also jene Flächenräume diesen proportional.

Zusätze. 1. Die Geschwindigkeit des zum Mittelpunkt der Kräfte tendirenden Körpers verhält sich umgekehrt, wie das Loth, welches man auf die Tangente des-

desjenigen Bogens fällt, welchen der Körper in jedem der einzelnen unendlich kleinen Zeittheilen durchläuft. Denn die Geschwindigkeiten an den Stellen A, B, C, D, E verhalten sich, wie die durchlauffenen Räume AB, BC..., diese aber, als Grundseiten gleicher Dreyecke, verhalten sich umgekehrt, wie der Dreyecke Höhen, welche eben jene Lothe sind.

Aus dieser Wahrheit folgt, daß die Bewegung im Kreise immer gleichförmig, oder immer gleich geschwinde sey. Daher geschieht alle Axendrehung, wenn sie durch nichts gestört wird, gleichförmig; allein die Bewegung der Planeten um die Sonne nothwendig ungleichförmig.

2. Da die Seiten AB, BC... des Polygons unendlich kleine Bogen einer Curve vorstellen; so wird, wenn der Körper sich um S bewegt, seine Schwungkraft, vermöge welcher er von S zu entfliehen sucht, der Centripetalkraft gleich seyn. Denn Bc, als Tangente, ist senkrecht auf BS, daher auch Cc auf CS, und Cc = BV; aber wegen des unendlich kleinen Bogens BC ist Cc die Verlängerung von CS, daher stellt Cc das Maß der Schwungkraft vor, welche folglich = der Centripetalkraft (oder der Anziehungskraft).

3. Stellt ferner das Polygon um S eine Kreisbahn vor; so ist VC, wie Bc senkrecht auf den Radius vektor, d. i. die Wurf- oder Tangentialkraft ist dann der Sinus des Bogens BC, und die Centripetal- oder An-

ziehungskraft, oder deren Maß VB der Quersinus von BC.

Je schneller sich daher ein Körper bewegt, d. i. einen je größeren Bogen er in derselben Zeit vermöge der Wurfkraft durchläuft, desto mehr wächst der Quersinus, oder eine desto größere Anziehung ist nöthig, um den Körper in der Bahn zu erhalten. Setzen wir also, die Anziehungskraft bleibe dieselbe VB; aber die Wurfkraft oder der Sinus des Bogens BC sey kleiner; so wird des Körpers Bahn enger; im entgegengesetzten Falle, wenn die Wurfkraft, bey derselben Anziehung, größer wird, als der Sinus des Bogens BC, so wird jene Bahn weiter, als die Kreisbahn.

4. Für verschiedene Bahnen verhalten sich die Centripetalkräfte, wodurch die Körper von der geraden Richtung beständig abgelenkt werden, wie jene Quersinusse (Sagittae) der in einerley Zeit durchlauffenen Bogen.

Fig. 52.

§. 56. Lehrsatz. Die Centripetalkraft eines im Kreise bewegten Körpers gleicht dem Quadrate des in einer gegebenen Zeit durchlauffenen Bogens, dividirt durch des Kreises Durchmesser.

Beweis. Es stelle AB einen unendlich kleinen Bogen vor, welchen der Körper A in einer unendlichen kleinen Zeit durchläuft. Zieht man nun den Durchmes-

ser

ser AL und fällt auf ihn das Loth IB, wo dann AI die Centripetalkraft ausdrückt; so entstehen mittelst der Sehne BL 2 ähnliche Dreyecke AIB, ABL, wo folglich $AL : AB = AB : AI$, und $AI = \frac{AB^2}{AL}$, oder $AL : AB : AI$.

Zusätze. 1. Also ist die Centripetalkraft eines im Kreise bewegten Körpers im zusammengesetzten Verhältnisse aus dem direkten der Quadrate der Geschwindigkeit und dem umgekehrten der Halbmesser des Kreises, d. i. $v = \frac{c^2}{r} = \frac{c^2}{d}$. Denn wegen der gleichförmigen Bewegung im Kreise, verhält sich die Geschwindigkeit, wie der in derselben Zeit durchlauffene Raum.

2. Für verschiedene Kreise ist also

$$V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r} = C^2 r : c^2 R.$$

3. Bey gleichförmiger Bewegung ist $t = \frac{s}{c}$, d. i. die Umlaufszeit in Kreisbahnen verhält sich direkt wie der Raum, und indirekt, wie die Geschwindigkeit. Setzt man daher statt des Verhältnisses der Peripherieen, als der durchlauffenen Räume, das Verhältniß der Halb- oder Durchmesser, so hat man für die periodischen Umlaufszeiten in Kreisbahnen die Formel: $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$.

Daher iſt auch $\frac{1}{T^2} : \frac{1}{t^2} = \frac{C^2}{R^2} : \frac{c^2}{r^2}$, oder

$\frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r} = V : v$ (Zuſ. 2.), d. i.

die Centripetalkraft iſt im zuſammengeſetzten Verhältniße aus dem direkten der Halbmeſſer der Kreisbahnen und dem indirekten duplizirten der periodiſchen Umlaufszeiten.

4. Daher, wenn $T = t$, folglich $\frac{R}{C} = \frac{r}{c}$, d. i. $C : c = R : r$ iſt, iſt auch $V : v = R : r$, oder die Centripetalkräfte verhalten ſich, wie die Halbmeſſer. Sind aber die Geſchwindigkeiten gleich, folglich $T : t =$ $R : r$; ſo iſt $V : v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$, d. i. die Centripetalkraft umgekehrt wie der Halbmeſſer.

5. Aus der letzten Formel im Zuſ. 3. erhellt eben ſo, daß, wenn $T : t = \sqrt{R} : \sqrt{r}$, oder die Geſchwindigkeiten in demſelben ſubduplizirten Verhältniße der Halbmeſſer ſind, jedesmal die Centripetalkräfte unter ſich gleich ſeyen, und umgekehrt.

6. Setzt man in derſelben Analogie des Zuſ. 3. ſtatt $T^2 : t^2$ das Verhältniß $R^3 : r^3$, was geſchieht, wenn iſt $T : t = R^{\frac{3}{2}} : r^{\frac{3}{2}}$, in welchem Falle die aus $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$ entwickelte Proportion $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ in

in diese $C : c = \frac{1}{\sqrt{R}} : \frac{1}{\sqrt{r}}$ übergeht, — d. i. wenn die periodische Umlaufszeiten in ratione Sesquiplicata der Halbmesser, und daher die Geschwindigkeiten im umgekehrten subduplizirten Verhältniße der Halbmesser sind; so ist $\frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2} = V : v$, oder die Centripetalkräfte verhalten sich umgekehrt, wie die Quadrate der Halbmesser, — und umgekehrt.

7. Und allgemein, wenn die periodische Umlaufszeit ist wie irgend eine Potenz des Halbmessers, d. i. wenn $t = r^n$, daher $c = \frac{1}{r^{n-1}}$; so wird sich die Centripetalkraft umgekehrt verhalten, wie r^{2n-1}, — und umgekehrt.

8. Setzt man $v = \frac{1}{r^2}$, d. i. die Centripetalkräfte nehmen ab im Verhältniße der Quadrate der Radien oder Distanzen; so wird, weil $v = \frac{r}{t^2}$ (Zus. 3.), auch $\frac{1}{r^2} = \frac{r}{t^2}$, d. i. $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$ seyn; d. i. die Quadrate der periodischen Umlaufszeiten werden sich, wie die Würfel ihrer Abstände vom Mittelpunkte der Kräfte verhalten; — und umgekehrt: wenn $t^2 = r^3$, so ist $v = \frac{r}{t^2} = \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^2}$, d. i. $V : v = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$.

An-

Anmerkung.

Man sieht leicht, daß das oben angeführte Keplerische Gesetz, welches wir hier in Ansehung der Kreisbahnen bewiesen haben, eben darum rücksichtlich aller elliptischen Bahnen gelten müsse, indem sehr kleine elliptische Bogen wie Kreisbogen können betrachtet werden.

Und überhaupt kann man alle diese hier beygebrachten Zusätze auf andere krummlinige Bahnen anwenden, sobald man annimmt, daß die Körper ähnliche Theile ähnlicher Curven beschreiben, und statt der gleichförmigen Bewegung im Kreise die gleichförmige Beschreibung der Flächenräume, und statt der Halbmesser die Abstände setzt.

Daß aber die Centripetalkräfte in obigem Verhältniße wirklich abnehmen, in welchem Kegelschnitte auch der Körper bewegt werde, werden die Auflösungen der unten folgenden Aufgaben evident lehren.

§. 57. Lehrsatz. Wenn ein Körper um einen unbeweglichen Punkt in irgend einer Bahn umherläuft, und in einem unendlich kleinen Zeittheile einen dann entstehenden Bogen beschreibt; so verhält sich die Centripetalkraft in der Mitte des Bogens direkt, wie der die Sehne dieses Bogens halbirende, und verlängert durch den Mittelpunkt der Kräfte gehende Quersinus, umgekehrt aber, wie das Quadrat der Zeit.

Beweis. Für dieselbe Zeit verhält sich der Quersinus, wie die Kraft (§. 55. Zus. 4.). Vermehrt man aber in irgend einem Verhältniße die Zeit; so verhält

sich

sich der in ihr vermöge der Centripetalkraft durchlaufene Raum, wie das Quadrat der Zeit; folglich verhält sich eben so der Quersinus; dieser ist also im zusammengesetzten Verhältniße der Kraft und des Quadrates der Zeit, daher die Centripetalkraft im direkten Verhältniße des Quersinus und im umgekehrten des Quadrates der Zeit, d. i. $v = \frac{\text{Sin. v.}}{t^2}$ (Newton drückt dieß so aus: erit vis centripeta in medio arcus, ut Sagitta directe et tempus bis inverse).

Fig. 53.

Zusätze. 1. Wenn ein Körper P um den Mittelpunkt S eine krumme Linie APQ beschreibt, welche die gerade Linie ZPR in irgend einem Punkte P berührt, und man auf diese Tangente von irgend einem andern Punkte Q der Curve die mit dem Abstande SP parallele QR, und QT auf PS senkrecht zieht; so verhält sich, den Bogen PQ unendlich klein gesetzt, die Centripetalkraft umgekehrt, wie der Ausdruck (ut Solidum, sagt Newton) $\frac{SP^2 . QT^2}{QR}$. Denn QR ist gleich dem Quersinus des doppelten Bogens QP, in dessen Mitte P ist, und das doppelte Dreyeck SQP, oder das Rechteck SP. QT ist der Zeit, in welcher jener doppelte Bogen beschrieben wird, proportional, folglich kann man das Quadrat davon statt des Quadrates der Zeit setzen.

2. Weil

2. Weil wegen des unendlich kleinen Bogens der Bogen QP statt des Sin. QT kann gesetzt werden, und das Loth SY auf die unendlich wenig vom Bogen abstehende Tangente gleich ist SP; so kann man auch statt des vorigen Ausdruckes setzen $\frac{SY^2 . QP^2}{QR}$.

3. Ist die Bahn entweder ein Kreis, oder macht sie mit einem Kreise einen unendlich kleinen Berührungswinkel, so, daß sie mit dem Kreise einerley Krümmung, und für den Berührungspunkt P einerley Krümmungshalbmesser hat; so verhält sich die Centripetalkraft, wenn PV eine durch den Mittelpunkt jenes Kreises vom Körper P aus gezogene Sehne ist, umgekehrt, wie $SY^2 . PV$. Denn $QT^2 = VT . TP$; aber weil die Punkt Q und P zusammenfallen, ist auch $QP^2 = VP . QR$, d. i. $VP = \frac{QP^2}{QR}$.

4. Weil ferner die Geschwindigkeit sich umgekehrt verhält, wie das Loth SY (§. 55. Zus. 1.) so verhält sich auch die Centripetalkraft direkt wie das Quadrat der Geschwindigkeit, und umgekehrt wie jene Sehne VP.

5. Durch nähere Bestimmung der Ausdrücke im 1. und 3. Zus. kann man immer, wenn eine Curve APQ und in ihr der Punkt S gegeben ist, zu dem die Tendenz der Centripetalkraft gerichtet ist, das Gesetz für diese Kraft finden, durch welche der Körper P, von der ge-

raden

raden Richtung beständig abgelenkt, in der Curve erhalten wird. Dieses zeigen die folgenden Aufgaben deutlich.

Fig. 54.

§. 58. Aufgabe. Es bewege sich ein Körper P in der Kreislinie VQPA, S sey der Punkt, zu welchem die Kraft, als zu ihrem Mittelpunkte, hinstrebt, man soll das Gesetz dieser Centripetalkraft finden.

Auflösung. Es sey Q der nächste Ort, nach welchem hin sich P bewegt, und PRZ die Tangente für den unmittelbar vorhergehenden Ort P. Zieht man nun die Sehne PV und AP; verlängert das Loth QT, und zieht durch Q LR || SP, begrenzt in der Kreislinie und der Tangente; so erhält man die ähnlichen Dreyecke ZQR, ZTP, VPA, daher RP^2 d. i. RL. QR (§. 126. III): $QT^2 = AV^2 : PV^2$ d. i. $\frac{RL.QR.PV^2}{AV^2} = QT^2$. Wenn man nun, weil P und Q zusammenfallen, statt RL setzt PV, und die Gleichung mit $\frac{SP^2}{QR}$ multiplizirt; so erhält man $\frac{SP^2.PV^3}{AV^2} = \frac{SP^2.QT^2}{QR}$; also verhält sich vermöge §. 57. Zus. 5. die Centripetalkraft, weil AV^2 gegeben ist, umgekehrt, wie das Quadrat des Abstandes oder der Höhe SP, in den Würfel der Sehne PV multiplizirt, w. z. f. w.

Zu-

Zusätze. 1. Wäre also jener Punkt S in der Kreislinie selbst, z. B. in V; so verhielte sich die Centripetalkraft umgekehrt, wie die 5te Potenz (quadratocubus) des Abstandes SP.

Fig. 55.

2. Die Kraft, mit welcher P in der Kreislinie APTV um den Mittelpunkt der Kräfte S sich bewegt, verhält sich zu der, mit welcher er in derselben Kreislinie und derselben periodischen Umlaufszeit sich um den Mittelpunkt der Kräfte R bewegt, wie $RP^2 . SP : SG^3$, d. i. zum Würfel der Linie, die aus S dem Abstande des Körpers vom Mittelpunkte R parallel gezogen, und in der Tangente PG begrenzt wird.

Denn beyde Kräfte sind wie $RP^2 . PT^3 : SP^2 . PV^3$, d. i. wie $SP . RP^2 : \frac{SP^3 . PV^3}{PT^3}$, oder: SG^3, weil wegen $\triangle$ PSG $\backsim$ TPV, SP: TP = SG: VP, folglich auch die Würfel dieser Seiten in Proportion sind.

3. Eben dieses ist gültig, in welcher Bahn P umherlauffen mag. Denn die Kräfte in dieser Bahn in Beziehung auf denselben Punkt P verhalten sich eben so, wie die Kräfte in der Kreisbahn von derselben Curvatur in P.

Fig. 56.

4. Setzt man den Punkt S, zu welchem die den Körper P in der Kreisbahn PQA erhaltende Centripetal-

talkraft tendirt, so sehr entfernt, daß alle Linien, wie PS, RS, für parallel gehalten werden können; so verhält sich jene Kraft umgekehrt, wie der Würfel der Ordinate PM. Denn zieht man den, jene Parallelen senkrecht schneidenden, Halbmesser AC und CP; so ist wegen der ähnlichen Drey. CPM, PZT, RZQ $CP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$. Aber, wie vorhin, $PR^2 = RQ (RN + QN)$, oder, weil QP ein unendlich kleiner Bogen, $= RQ . 2PM$; also $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$, oder $\frac{QT^2 . SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 . SP^2}{CP^2}$. Es verhält sich also die Centripetalkraft umgekehrt, wie letzterer Ausdruck, daher, weil $\frac{2PS^2}{CP^2}$ ein bestimmtes Verhältniß ist, wie PM^3.

Auf ähnliche Art beweist man, daß ein in einem andern Kegelschnitte bewegter Körper in seiner Bahn von derjenigen Centripetalkraft erhalten wird, welche sich umgekehrt verhält, wie der Würfel der zum entferntesten Mittelpunkte der Kräfte tendirenden Ordinate der Curve.

Fig. 57.

§. 59. Aufgabe. Man soll das Gesetz der zum Brennpunkte S der elliptischen Bahn, in welcher sich der Körper P bewegt, tendirenden Centripetalkraft finden.

Auf-

Auflösung. Man ziehe den Radius vektor SP, welche den Durchmesser DK in E und die Ordinate Qv in x schneidet, und ergänze das Parallelogramm QxPR. Nun ist $EP = AC$ (K. §. 35.), und, fällt man auf SP das Loth QT und nennt den Parameter der Hauptaxe p, $p. QR : p. Pv = QR : Pv$; aber wegen $\triangle PCE \sim Pxv$ ist $Px (= QR) : Pv = PE (= AC) : PC$; daher

$$p. QR : p. Pv = AC : PC.$$

Eben so $p. Pv : Gv. vP = p : Gv$,

und $Gv. vP : Qv^2 = PC^2 : CD^2$ (K. §. 33.).

Wegen des unendlich kleinen Bogens PQ ist $Qx^2 = Qv^2$, und wegen $\triangle QTx \sim PFE$ ist $Qx^2 : QT^2 = PE^2 : PF^2 = AC^2 : PF^2$. Aber (K. §. 34. Zus.) $AC. CB = DC. PC$, d. i. $AC : PF = DC : CB$, folglich

$$Qv^2 : QT^2 = CD^2 : CB^2.$$

Setzt man alle diese Proportionen zusammen, so hat man, indem man statt $p. AC$ setzt $2BC^2$, indem $p = \frac{4BC^2}{2AC}$ (K. §. 20. Zus. 3.), $p. QR : QT^2 = 2BC^2$.

$PC^2. CD^2 : PC. Gv. CD^2. CB^2 = 2PC : Gv.$

Da nun P und Q zusammenfallen; so ist auch $p. QR = QT^2$; beydes mit $\frac{SP^2}{QR}$ multiplizirt, hat man $p. SP^2 = \frac{SP^2. QT^2}{QR}$, folglich, da p eine Konstante ist, verhält sich die Centripetalkraft umgekehrt, wie das Quadrat des Abstandes SP.

Fig.

Fig. 58.

§. 60. Aufgabe. Man soll das Gesetz der Centripetalkraft finden, deren Tendenz zum Brennpunkte einer Hyperbel, in welcher ein Körper P sich bewegt, gerichtet ist.

Auflösung. Es seyen CA, CB die halben Axen der Hyperbel; PG, KD die zugeordneten Durchmesser; PF, Qt die Lothe auf jene, und Qv die Ordinate für den Durchmesser GP. Man ziehe SP, welche die Ordinate in x, und auch den Durchmesser DK in E schneidet, und ergänze das Parallelogramm PQ. — Nun ist EP = AC. Denn wenn man vom andern Brennpunkte HHI || EC zieht, so ist wegen CS = CH auch ES = EI, so, daß EP (weil SP + 2PE = EI + PE) die halbe Differenz der Linien PS, PI ist; aber PH = PI. Denn wegen IH || PR ist o = HPR und I = i; nun ist i = RPx = HPR (K. §. 42.), also I = o, folglich PH = PI, und EP die halbe Differenz der Radien vektoren PS, PH, deren Unterschied = 2AC (K. §. 40.), mithin EP = AC.

Man fälle nun auf SP das Loth Q'T. Nennt man ferner den Parameter für die Hauptaxe p ($= \frac{c^2}{a} = \frac{(2BC)^2}{2AC}$ (K. §. 37. Zus. 1.)); so ist p. QR: p. Pv = QR: Pv; aber wegen △ CPE ∽ Pxv ist PE (= AC): PC = Px (= QR): Pv, daher

p. QR: p. Pv = AC: PC.

Eben

Eben so: p. Pv: Gv. Pv = p: Gv,
und Gv. Pv: $Qv^2 = PC^2 : CD^2$ (K. §. 47. Zus. 4.)

Nun ist, wenn man den Bogen PQ unendlich klein setzt, $Qv^2 = Qx^2$, folglich da $\triangle$ EPF ∽ QxT, Qx^2 oder $Qv^2 : QT^2 = EP^2 : PF^2$ d. i. wie $CA^2 : PF^2$, oder da alle Parallelogramme unter je 2 zugeordneten Durchmesser gleich sind (K. §. 48. Zus.), nämlich CA. CB = CD. PF, daher CA : PF = CD : CB; so ist auch

$$Qv^2 : Q'T^2 = CD^2 : CB^2.$$

Setzt man alle diese Proportionen zusammen, und substituirt für AC. p den Werth $2BC^2$; so entwickelt man

$$p.\ QR : QT^2 = 2PC : Gv.$$

Aber, weil P und Q zusammenfallen, 2PC = Gv, sohin auch $p.\ QR = QT^2$, und, beydes mit $\frac{SP^2}{QR}$ multiplizirt, $p.\ SP^2 = \frac{SP^2 . Q'T^2}{QR}$. Nun ist p eine Konstante; folglich ist vermöge §. 57. Zus. 5. die Centripetalkraft im umgekehrten duplizirten Verhältniße des Abstandes SP des Körpers P vom Mittelpunkte der Kräfte.

Fig. 59.

§. 61. Aufgabe. Es sey die Parabel APQ, deren Scheitel in A ist, des Körpers P Bahn; das Gesetz der zum Brennpunkt, oder Mittelpunkt der Kräfte S tendirenden Centripetalkraft zu finden.

Auf-

Auflösung. Es sey PO die Ordinate; PM die Tangente für P, mit der verlängerten Axe in M zusammenstoßend; SN das vom Brennpunkt S auf die Tangente gefällte Loth. Von der Stelle Q, wohin sich P zunächst bewegt, ziehe man QR ‖ SP, und das Perpendikel QT; dann Qv ‖ PM, welche den Durchmesser YPv in v, und den Radius vektor, oder den Abstand SP in x schneidet.

Nun sind die Drey. Pxv, SPM ähnlich und SP = SM (K. §. 12. Zus.), also auch Px oder QR = Pv. Aber $Qv^2 = p'x'$ (K. §. 19. Zus. 1.)) = 4SP. Pv (ebend. 2)) = 4SP. QR, oder auch Qx^2 = 4SP. QR, indem P und Q zusammenfallen.

Weil ferner $\triangle$ QxT $\backsim$ SPN; so ist

$$Qx^2 : QT^2 = PS^2 : SN^2;$$

aber $SN^2 = PS.\ SA$ (K. §. 16.), daher

$$Qx^2 : QT^2 = PS : SA = 4PS.\ QR :$$

4SA. QR; folglich $Q'\Gamma^2 = 4SA.\ QR$, und beydes mit $\frac{SP^2}{QR}$ multiplizirt, erhält man $\frac{SP^2.\ QT^2}{QR}$ = SP^2. 4SA. Nun ist 4SA eine gegebene oder konstante Größe, also ist die Centripetalkraft im umgekehrten duplizirten Verhältniße des Radius vektors SP, oder des Abstandes des Körpers P vom Mittelpunkte der Kräfte.

Zusätze. 1. Geht also ein Körper P vom Orte P nach der geraden Linie mit irgend einer Geschwindig-

keit fort, und wird er zugleich von der Centripetalkraft, welche dem Quadrate des Abstandes der Orte vom Mittelpunkte der Kräfte umgekehrt proportional ist, getrieben; so bewegt er sich in irgend einem Kegelschnitte, dessen Brennpunkt der Mittelpunkt der Kräfte ist; — und umgekehrt.

2. Wenn sich ein Körper von seinem Orte mit einer Geschwindigkeit bewegt, wodurch er in einem unendlich kleinen Zeittheile die Linie PR, und vermöge der Centripetalkraft in derselben Zeit den Raum QR durchlaufen kann; so wird seine Bahn ein Kegelschnitt seyn, dessen Parameter p gleich ist $\frac{QT^2}{QR}$ (indem $QT^2 = 4SA.QR$, aber $4SA = p$ ist), unter der Voraussetzung des unendlichen kleinen Bogens PQ, oder der unendlichen Verminderung von PR und QR.

Anmerkung.

Aus der Auflösung dieser Aufgaben sieht man deutlich ein, wie die Bewegung eines Körpers P um einen andern S, der sich im Brennpunkte der Bahn des erstern befindet, zur Wirklichkeit kommen konnte. Wirkte nämlich in einem Augenblicke — auf irgend eine Art eine Wurfkraft auf P, so, daß er nach einer geraden Richtung getrieben wurde, und ward er zugleich von einer andern Kraft, welche im umgekehrten Verhältniße des Quadrats des Abstandes des Körpers P vom Brennpunkte wirkte, sollicitirt, zum Brennpunkte hinzugehen; so mußte der Körper P um S einen der Kegelschnitte beschreiben. Und umgekehrt: lehrte die Erfahrung die Bewegung eines Körpers P um einen andern in irgend

einem

einem Kegelschnitte; so konnte man nicht nur das Verhältniß der Kräfte bestimmen, wodurch diese Bewegung möglich wurde; sondern auch die Dauer der periodischen Umlaufszeiten finden.

Aehnliche nützliche Resultate geben die folgenden Sätze.

§. 62. Lehrsatz. Wenn sich mehrere Körper um einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt bewegen, und die Centripetalkraft im umgekehrten duplizirten Verhältniße des Abstandes der Orte jener Körper vom Mittelpunkte wirkt; so sind die Parameter der Hauptaxen jener Bahnen im duplizirten Verhältniße der Flächenräume, welche die Radien vektoren in Beziehung auf jene Körper in derselben Zeit beschreiben.

Beweis. Nach Zus. 2. §. 61. ist $p = \frac{QT^2}{QR}$; aber QR ist in der gegebenen Zeit, wie die progenerirende Centripetalkraft, d. i. umgekehrt, wie SP^2, also $\frac{QT^2}{QR}$, wie $QT^2 . SP^2$, d. i. der Parameter p im duplizirten Verhältniße des Flächenraumes TQ. SP.

Zusatz. Da der ganze Flächenraum der Ellipse = QT. SP multiplizirt mit der periodischen Umlaufszeit; so ist derselbe Flächenraum, oder das ihm proportionale Rechteck aus den Axen auch im komponirten Verhältniße aus dem subduplizirten des Parameters und dem der periodischen Umlaufszeit.

§. 63. Lehrsatz. Unter derselben Voraussetzung sind die periodischen Umlaufszeiten in Ellipsen im subduplizirten Verhältniße der Würfel der großen Axen (in ratione sesquiplicata axium majorum).

Beweis. a: c: p (K. §. 20. Zus. 3), daher (wie in a: ae: ae^2 ist a $ae = \sqrt{ae^2 . a^3}$, so auch hier) das Rechteck ac aus beyden Axen, wie $\sqrt{p} . \sqrt{a^3}$. Aber nach dem vorigen Zus. ist, wenn man die periodische Umlaufszeit t nennt, $ac = \sqrt{p} . t$, also $\sqrt{p} . \sqrt{a^3} = \sqrt{p} . t$, d. i. $\sqrt{a^3}$ wie t, oder t wie $a^{\frac{3}{2}}$.

Zusatz. Also sind für Kreisbahnen, deren Durchmesser den großen Axen elliptischer Bahnen gleichen, die periodische Umlaufszeiten dieselben, wie für letztere.

§. 64. Lehrsatz. Unter derselben Voraussetzung, und wenn man für die Orte, wo sich die Körper in ihren elliptischen Bahnen befinden, Tangenten und auf diese vom gemeinschaftlichen Brennpunkte S (Fig. 57.) aus Lothe zieht; so sind die Geschwindigkeiten der Körper im komponirten Verhältniße aus dem umgekehrten jener Lothe und dem direkten subduplizirten Verhältniße der Parameter der Hauptaxe.

Beweis. Man fälle das Loth SY auf PR, als Tangente des unendlich kleinen Bogens PQ, mit dem sie folglich zusammenfällt. Nun kann man die Geschwindigkeit des Körpers, mit der er diesen Bogen in einem unendlich kleinen Zeittheile durchläuft, für gleichförmig

förmig halten, sie verhält sich folglich, wie dieser Bogen, oder wie PR, oder da PR: QT = SP: SY, wie $\frac{QT.\ SP}{SY}$, d. i. umgekehrt, wie SY und direkt wie QT. SP, d. i. wie der in einer gegebenen Zeit beschriebene Flächenraum (§. 62. Zus.), folglich vermöge §. 62, wie $\sqrt{p}$; also, wenn c die Geschwindigkeit und l das Loth bedeutet, $c = \frac{1}{l} . \sqrt{p}$.

Zusätze. 1. Also $c^2 . l^2 = p$, d. i. die Parameter sind im zusammengesetzten Verhältniße aus dem duplizirten der Geschwindigkeiten und dem duplizirten der Lothe.

2. Werden jene Lothe auf die Tangenten selbst die Distanzen (= d), wie dieses geschieht, wenn sich ein Körper in den Apsiden, d. i. in seinem größten oder kleinsten Abstande vom Brennpunkte befindet; so wird $c = \frac{1}{d} . \sqrt{p}$.

3. Daher, da beym Kreise $p = a = 2r$ (K. §. 23. Zus. 1.) und ein Körper im Kreise denselben Abstand (= r) vom Mittelpunkte hat, als ein anderer Körper im Kegelschnitte, wenn er sich in den Apsiden befindet; so ist $C : \gamma = \sqrt{p} : \sqrt{2r}$, d. i. die Geschwindigkeit im Kegelschnitte ist zu der im Kreise im subduplizirten Verhältniße des Parameters zu jener doppelten Distanz.

4. Wenn sich Körper in Ellipsen bewegen; so sind ihre Geschwindigkeiten, unter Voraussetzung mittlerer Abstände vom gemeinschaftlichen Brennpunkte, dieselben, welche ihnen zukommen würden, wenn sie sich in Kreisbahnen mit denselben Abständen bewegten; d. i. jene Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus den mittleren Abständen (§. 56. Zus. 6.), oder $c = \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{d}}$. Denn die Lothe sind nun die halben kleinen Axen; diese aber sind wie die mittleren Proportionallinien zwischen den Abständen und den Parametern; es ist nämlich nach §. 20. Zus. 3. d. Kegelschn. $c^2 = ap$, oder $(\frac{1}{2}c)^2 = \frac{a}{2}. p =$ (vermöge der Voraussetzung) $r. p = dp$, daher $d : \frac{1}{2}c : p$; also $p = \frac{\frac{1}{4}c^2}{d}$, oder $= \frac{d^2}{d} = d$, sohin die Geschwindigkeit c (nach Zus. 2.) $= \frac{1}{d}. \sqrt{d} = \sqrt{\frac{1}{d^2}}. d =$

$\sqrt{\frac{1}{d}} = \frac{1}{\sqrt{d}}$.

5. Für denselben, oder auch für verschiedene Kegelschnitte, deren Parameter der Hauptaxe gleich sind, ist die Geschwindigkeit des bewegten Körpers umgekehrt, wie das auf die Tangente vom Brennpunkte aus gefällte Loth, d. i. $c = \frac{1}{d}$.

6. In

6. In Betreff einer paraboliſchen Bahn iſt die Geſchwindigkeit im umgekehrten ſubduplizirten Verhältniße des Abſtandes des Körpers vom Brennpunkte ſeiner Bahn; für die elliptiſche Bahn iſt die Geſchwindigkeit mehr, für die hyperboliſche weniger veränderlich. Denn in der Parabel (Fig. 59.) iſt $SN^2 = PS. SA$ (§. 61.); daher $PS^2 : SN^2 = PS : SA$; nun iſt SA beſtändig, folglich iſt SN^2 wie PS, und SN wie $\surd PS$, daher die Geſchwindigkeit $c = \frac{1}{d} = \frac{1}{SN} = \frac{1}{\surd PS}$. Allein daſſelbe Loth iſt in der Ellipſe mehr, in der Hyperbel weniger veränderlich.

7. Dieſelbe Wahrheit, die wir oben ſchon erwieſen haben, daß nämlich die Geſchwindigkeit des in einer paraboliſchen Bahn bewegten Körpers ſich zur Geſchwindigkeit eines in der Kreisbahn mit demſelben Abſtande vom Mittelpunkte bewegten Körpers verhalte, $= \surd 2 : \surd 1$, oder: 1, ſieht man auch aus dem hier Geſagten ein. Denn nennt man C die Geſchwindigkeit in der Parabel und γ die im Kreiſe; ſo verhält ſich in Anſehung des Scheitels der Parabel vermöge Zuſ. 2. C: $\gamma = \frac{1}{d}. \surd p : \frac{1}{d}. \surd a$ (Kegelſchn. §. 23. Zuſ. 1.) $= \surd p : \surd a$ (vermöge der Vorausſ.) $= \surd 4d$ (K. §. 5. Zuſ. 5.) : $\surd 2d = \surd 2 : 1$. Nun iſt aber dieſes Verhältniß bleibend für alle Abſtände (Zuſ. 6 und §. 56. Zuſ. 6.); alſo iſt die Geſchwindigkeit in

allen

allen Stellen der Parabel gleich der Geschwindigkeit eines im Kreise bey der Hälfte des Abstandes bewegten Körpers; in der Ellipse aber ist sie kleiner, in der Parabel größer.

8. Die Geschwindigkeit eines in einem Kegelschnitte bewegten Körpers verhält sich zur Geschwindigkeit im Kreise bey einem dem halben Parameter des Kegelschnittes gleichen Abstande, wie dieser Abstand zum Lothe, das man aus dem Brennpunkte auf die Tangente des Kegelschnittes fällt. Denn nach Zus. 5. ist $c = \frac{1}{d}$, folglich $C : \gamma = \frac{1}{d} : \frac{1}{\frac{1}{2}p} = \frac{1}{2}p : d = \frac{1}{2}p : l$, wo l das genannte Loth bezeichnet.

9. Nach §. 56. ist die Geschwindigkeit γ in dem im Zus. 8. angenommenen Kreise zur Geschwindigkeit c in jedem andern Kreise im umgekehrten subduplizirten Verhältnisse der Abstände, d. i. $\gamma : c = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}p}} : \frac{1}{\sqrt{d}}$; oder

$$\gamma : c = \sqrt{d} : \sqrt{\tfrac{1}{2}p};$$

aber auch $C : \gamma = \frac{1}{2}p : l$

daher $C : c = \frac{1}{2}p . \sqrt{d} : l . \sqrt{\frac{1}{2}p}$

$= \sqrt{d} . \sqrt{\frac{1}{4}p^2} : l . \sqrt{\frac{1}{2}p} = \sqrt{d} . \frac{1}{2}p : l$, d. i. die Geschwindigkeit eines in einem Kegelschnitte bewegten Körpers verhält sich zu der Geschwindigkeit in der Kreisbahn, wie die mittlere Proportionallinie zwischen dem gemeinschaftlichen Abstande und dem halben Parameter

meter zu dem vom gemeinschaftlichen Brennpunkte auf die Tangente des Kegelschnittes gefällten Lothe.

Anmerkung.

Die hier entwickelten Wahrheiten dienen, den sehr unregelmäßigen Lauf der Planeten in Ellipsen auf einen regelmäßigen in Kreisbahnen zurückezuführen, dadurch auf eine leichtere Weise die Geschwindigkeit in ihren Bahnen zu berechnen, so wie sie überhaupt den astronomischen Calcul über die Bewegung der Planeten sehr erleichtern helfen.

Die Gravitation und Schwere.

§. 65. Bisher haben wir die Bewegung eines Körpers als um einen fixen Punkt, dem Mittelpunkte der Kräfte (als centrum immobile) betrachtet; allein ein solcher unbeweglicher Mittelpunkt, sagt Newton, existirt kaum in der Natur, weil alle Anziehung wechselseitig ist, jeder Körper folglich von dem andern eben so gut angezogen wird, als er ihn selbst anzieht. Vermöge dieser wechselseitigen Anziehung müssen sie sich also um einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt bewegen, und so Systeme von Körpern gebildet werden. Dieß der Grund, warum Newton, die bisher bewiesenen Hauptsätze, daß nämlich die Centripetalkräfte im Verhältniße der Quadrate der Entfernungen abnehmen, und die vom Radius vektor beschriebenen Räume den Beschreibungszeiten proportional sind, noch eigends in Ansehung dieses gemeinschaftlichen Mittelpunktes der Schwere bewiesen hat.

Newton hatte sich bisher sorgfältig gehütet, die Kraft, wodurch die Körper gegen einen gewissen Punkt hin getrieben werden, näher, gleichsam physisch, zu bestimmen. Der allgemeine Ausdruck „Centripetalkraft, Centralkräfte" genügte ihm, als Mathematiker. Letzterer Ausdruck befaßt 1. die Kraft, welche den Planeten nach der Sonne oder dem Mittelpunkte der Kräfte hintreibt (Centripetalkraft); 2. die Kraft, die ihn nach der Tangente seiner Bahn treibt (Tangential- oder Wurfkraft), woraus eine vom Mittelpunkte abwärts gerichtete Kraft (Fliehkraft, vis centrifuga) erwächst. Selbst da, wo Newton von der Bewegung mehrerer Körper um einen oder den gemeinschaftlichen Schwerpunkt handelt, sagt er, er betrachte die Centripetalkräfte als Anziehungskräfte, wenn sie gleich vielleicht besser Impulse genannt würden, und bediene sich als Mathematiker jenes Ausdruckes blos, um von seinen Lesern besser verstanden zu werden.

Auf diese Weise suchte Newton, wie er in einem Scholion S. 172. ausdrücklich bemerkt, den verschiedenen Hypothesen und Streitigkeiten der Physiker seiner Zeit auszuweichen. Allein zu unserer Zeit ist durch die dynamische Naturlehre, deren Schöpfer Kant ist, dieser Punkt als außer Streit gesetzt zu betrachten. Kant beweist, daß die Anziehungskraft Grundkraft sey, weil durch sie die Materie erst möglich gemacht werde; daß also diese Kraft nicht weiter erklärbar sey. Er beweist, daß die Anziehungskraft eine unmittelbar in

die

die Ferne wirkende, durchdringende Kraft sey, welche sich im Weltraume von jedem Theile der Materie auf jeden andern unmittelbar ins Unendliche erstrecke. (Daß Voigt's Hypothese, nach welcher der Ursprung der vorhin genannten Centralkräfte in der durch das Licht anziehenden und durch die Wärme abstoßenden Wirksamkeit der Sonnenstralen liegt — s. dessen Mag. f. d. neuesten Zust. d. Naturk. B. 2. S. 613. u. B. 12. S. 35. . . — dem Geiste der Kant'schen Theorie zuwider sey, erhellt leicht.)

Die Wirkung von dieser ursprünglichen Kraft, welche alle Materie auf alle und in allen Entfernungen unmittelbar ausübt, heißt die Gravitation; die Bestrebung, in der Richtung der größeren Gravitation sich zu bewegen, ist die Schwere (gravitas).

Das Gesetz der allgemeinen Gravitation ist: die Gravitation ist im zusammengesetzten Verhältniße aus dem direkten der Masse und dem umgekehrten duplizirten Verhältniße des Abstandes. Denn da alle Theilchen der Materie zugleich als thätig müssen betrachtet werden, indem jedes Theilchen wieder Materie ist; so ist offenbar, daß die ursprüngliche Anziehungskraft, oder ihr Wirken der Quantität der Materie, oder der Masse proportional sey. Weil ferner die allgemeine Anziehungskraft, als penetrirende Kraft, rings um auf alle Materien im Weltraume unmittelbar wirkt; so betrachtet man ihr Wirken

mit

mit Recht als das Wirken auf die Punkte von Kugelflächen, von denen man sich die Richtungslinien zum ziehenden Punkte auf ähnliche Art zusammenlaufen vorstellt, wie man sich die leuchtenden Stralen von den Punkten der Kugelflächen zum leuchtenden Punkte gezogen denken muß. Denn nur so kann man erklären, daß der Grad der Erleuchtung von Kugelflächen im Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen abnehme, wie Lambert in seiner Photometrie bewiesen hat. Gleichwie nun die Stärke der Erleuchtung nicht nach der Menge der erleuchtenden Theile des leuchtenden Punktes, sondern bey derselben Menge der Lichtstralen, die sich in verschieden distirenden Kugelflächen gleichförmig verbreiten, nach ihrem Grade geschätzt wird, auf dieselbe Art muß die Wirkung jeder Kraft, als solcher, bey derselben absoluten Größe, nur nach ihrem Grade geschätzt werden. Wo denn sogleich erhellt, daß dieser Grad der Wirkung auf jeden Punkt in dem den ziehenden Punkt umgebenden Raume bey derselben Größe im umgekehrten Verhältnisse des Raumes stehe. Nun wachsen aber Kugelflächen im Verhältnisse der Quadrate ihrer Halbmesser oder der Entfernungen vom ziehenden Punkte (S. §. 176. Zus. 5.); also wirkt die allgemeine Gravitation in demselben umgekehrten duplizirten Verhältnisse der Abstände.

So sehen wir denn das Gesetz der Centripetalkräfte für alle Kegelschnitte, in welchen sich die Planeten bewegen, a priori bestättigt. Kam nämlich zur

An-

Anziehungskraft, vermöge welcher ein kleinerer Körper von einem grösseren nach jenem Gesetze angezogen wurde, auf irgend eine Weise für den letzteren Körper noch eine Seitenkraft, oder Wurfkraft hinzu; so konnte dieser bey seinem Bestreben, in der Richtung der grösseren Gravitation zum grösseren Körper hinzuzugehen, nicht auf diesen fallen, sich aber auch nicht gänzlich von ihm entfernen; er mußte also in irgend einem Kegelschnitte sich um denselben bewegen. So konnten und mußten sich im Allgemeinen Planetensysteme gestalten (vergl. §. 61. Anm.).

Und insbesondere liegt in demselben Gesetze der allgemeinen Gravitation die Ursache der Bewegung der Monde um ihre Hauptplaneten. Wird sich wohl, fragte Newton, die Gravitation der Erde, vermöge welcher die Erdkörper in $1''$ $15\frac{1}{2}$ Fuß durchlaufen, so, daß sich die durchlaufenen Räume, wie die Quadrate der Zeiten, oder die einzelnen Räume, wie die ungeraden Zahlen verhalten, — auch auf den Mond erstrecken, so daß es jene Kraft ist, welche ihn in seiner Bahn erhält?

Newton schloß auf folgende Art: Man setze des Mondes A (Fig. 52.) mittleren Abstand von dem Erdmittelpunkte C = 60 Erdhalbmesser, so, daß sich also dessen Abstand D zu des Erdkörpers E Abstand d verhält, = 60: 1. Der Mondsbahn Durchmesser sey = 2352946909, und der Umfang der Bahn = 7394976000 par. Fuß nach astronomischen Beobachtungen.

gen. Da nun der Mond in 27 T. 7 St. 43′ seine Bahn um die Erde durchläuft; so durchläuft er in 1′ einen Bogen von 189764 Fuß. Daher ist der Quersinus AI, welcher die Größe der Attractivkraft vorstellt, $= \frac{AB^2}{AL}$ (§. 56.) $= 15'\frac{1}{2}$ beynahe; d. i. vermöge dieser Kraft würde der Mond beym freyen Falle diesen Raum in 1′ durchlaufen.

Weil aber jene Kraft im umgekehrten duplizirten Verhältniße des Abstandes wirkt; so wirkt sie 60^2mal stärker auf den Körper E in der Erdnähe, als auf den 60mal weiter distirenden Mond, sohin würde dieser Körper E in 1′ einen Raum von 60^2. $15\frac{1}{2}$ Fuß ungefehr, daher in 1″ $15\frac{1}{2}$ F. durchlaufen müssen; nun ist letzteres wirklich durch Versuche dargethan, also ist es auch die Schwerkraft, welcher den Körper E durch diesen Fallraum nöthigt, und den Mond in seiner Bahn erhält.

Dasselbe Gesetz der allgemeinen Gravitation wurde ferner nicht nur durch die geringere Anzahl der Pendulschwingungen unter dem Aequator, als in derselben Zeit unter den Polen, sondern auch durch die Ablenkung des Lothes an großen Bergen bestättigt. Auf die vollkommenste Art wurde der Versuch über diesen Gegenstand 1773 von Maskelyne an dem mitten in Schottland gelegenen, ungefehr 700 Toisen hohen, Berge Shehallien angestellt. Die astronomische Bestimmung der nördlichen und südlichen Station, an diesem

Ber-

Berge genommen, gab beyder Breitendifferenz = 54″, 6; allein die genaue geodät'sche Distanzbestimmung dieser Orte gab die Breitendifferenz = 42″, 94. Demnach war der doppelte Einfluß der Attraction des Berges auf die Ablenkung des Lothes bey Beobachtung der Zenithdistanzen vieler Sterne (um die Breite der Stationen zu finden, — da nämlich die Breite = der Polhöhe = dem Abstande des Zeniths vom Aequator nach §. 6.; so war aus der bekannten Abweichung der Sterne und ihrer Zenithdistanz auch die geographische Breite der Stationen bekannt —) 11″, 6, indem nämlich auf der Südseite des Berges das Loth nördlich angezogen, und dadurch die Ortsbreite vermindert, hingegen auf der Nordseite natürlich vermehrt, folglich auf jeder Station die Breitebestimmung um 5 — 6″ fehlerhaft wurde. Diese Ablenkung des Lothes wird dadurch, daß die Anziehungskraft der Erde nicht blos im Verhältniße der Masse, sondern im umgekehrten Verhältniße der Quadrate der Entfernungen wirkt, möglich, indem jeder Erdpunkt mehr als 3 Millionen Toisen vom Mittelpunkte der Erde entfernt bleibt, da sich hingegen derselbe dem Attractionsmittelpunkte eines Berges bis auf einige 100 Toisen nähern kann (vergl. monatl. Corresp. Apr. 1810.).

Volumen; Masse; spezifisches Gewicht; Dichtigkeit der Planeten und Schwere auf denselben.

§. 66. Da die Attractivkraft der Erde jeden Erdkörper nöthigt, zum Erdmittelpunkte zu tendiren; so muß sich

sich der Effekt dieser Kraft bey dem ruhenden Körper durch den Druck auf die Unterlage äußern, und zwar um so stärker äußern, je größer des Körpers Masse ist; d. i. das Gewicht eines Körpers ist im Verhältniße zur Masse. Dieses, der Masse proportionelle, Gewicht nennt man auch absolutes Gewicht (pondus absolutum).

Der zwischen den Grenzen einer Materie enthaltene Raum, seiner Quantität nach betrachtet, heißt Raumesinhalt (volumen); den Grad der Erfüllung eines Raumes vom bestimmten Inhalte nennt man Dichtigkeit (densitas), und das Gewicht eines Körpers im Vergleiche mit dem Gewichte eines andern Körpers, wobey man auf ihr Volumen Rücksicht nimmt, heißt spezifisches Gewicht (gravitas specifica, oder richtiger, pondus specif.).

Es erhellt leicht, daß ein Körper um so dichter, als ein anderer seyn müsse, je kleiner sein Volumen, je mehr Masse er aber, oder je mehr Gewicht er hat. Wenn m die Masse, d die Dichtigkeit, v das Volumen und p das absolute Gewicht bezeichnet; so ist jene Wahrheit durch den, eine Proportion anzeigenden, Ausdruck gegeben $d = \frac{m}{v} = \frac{p}{v}$; ist daher $M = m$; so ist $D:$ $d = \frac{1}{V} : \frac{1}{v}$, und, ist $V = v$, $D: d = M: m =$ P: p; — Analogieen zur Vergleichung der Dichtigkeiten der Körper. Die spezifischen Gewichte nun sind

den

den Dichtigkeiten proportional. Denn je mehr absolutes Gewicht, oder je mehr Masse ein Körper hat, und je kleiner sein Volumen in Vergleich mit einem andern Körper ist, desto spezifisch schwerer ist er.

Betrachtet man nun die elliptischen Bahnen der Planeten in Ansehung ihrer mittleren Bewegung, wie Kreise; so kann man, wie bey unserem Monde, aus der Geschwindigkeit, mit welcher ein Planet A (Fig. 52.) einen Bogen AB in 1′ oder 1″ durchläuft, und der großen Axe, oder dem Durchmesser seiner Bahn die Größe der Anziehungskraft, oder den Quersinus AI finden. Daher vermag man auch nach §. 56. Zus. 1. das Verhältniß der Anziehungskräfte derjenigen Planeten, um welche sich andere bewegen, zu finden. So ist z. B. der erste Jupiters-Mond beynahe eben so weit von seinem Attractionscentrum entfernt, als der Mond der Erde von dem seinigen. Also verhalten sich in Ansehung beyder Hauptplaneten die Anziehungskräfte, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, mit welchen sie ihre Bahnen durchlaufen. Nun bewegt sich der Jupiters-Mond beynahe 16mal geschwinder, als unser Mond; also ist die Anziehungskraft des Jupiters für die gleiche Weite 256mal größer, als die der Erde. Setzt man ferner, der Mond sey von der Erde eben so weit weg, als die Sonne, welche 400mal weiter von der Erde distirt, als der Mond; so wäre die Mondsbahn so groß, als die der Erde, und das Quadrat seiner Umlaufszeit würde sich zum Quadrate seiner wahren Umlaufs-

laufszeit verhalten, wie $400^3 : 1$, d. i. das Quadrat seiner Umlaufszeit würde dann 64000000 größer seyn, als das Quadrat seiner gegenwärtigen Umlaufszeit; er würde demnach 8000 später um die Erde, als itzt, oder erst in 615 Jahren umherkommen. Es wäre also um eben soviel seine Geschwindigkeit kleiner, als die der Erde; folglich die Anziehungskraft der Erde um $615^2 = 378225$mal kleiner, als die der Sonne. (Hieraus erhellt zugleich, daß die Sonne unmöglich um die Erde laufen könne.) Auf ähnliche Weise kann man die Größe der Anziehungskraft des Saturns und Uranus im Verhältniße zur Anziehungskraft der Erde bestimmen.

Die allgemeine Formel für diese Berechnung findet man so: Man setze den Abstand des Jupiters von der Sonne $= 1$; seine Umlaufszeit $= 1$; den Abstand eines seiner Trabanten $= r$, und dessen Umlaufszeit $= t$; so ist die Kraft, mit der Jupiter seine Trabanten anzieht, $= \frac{r}{t^2}$ (§. 56. Zus. 3.), verglichen mit der Anziehungskraft der Sonne auf den Jupiter. Wäre also der Abstand des Trabanten $= 1$; so würde die Anziehungskraft v des Jupiters gegen seinen Trabanten zur wirklich ausgeübten Anziehungskraft $\frac{r}{t^2}$ im umgekehrten duplizirten Verhältnisse der Abstände seyn, d. i. es wäre $v : \frac{r}{t^2} = r^2 : 1$, oder unter dieser Voraussetzung des Abstandes $= 1$, wäre $v = \frac{r^3}{t^2}$, welches die gesuchte

For-

Formel für die Größe der Anziehungskraft oder für die ganze Masse des Jupiters ist. Dieselbe Formel erhält man auch nach dem Gesetze der allgemeinen Gravitation auf folgende Weise: Wenn m die Masse des Jupiters ist; so ist seine Anziehungskraft $= \frac{m}{r^2} = AI$;

oder $m = AI. r^2$; aber $AI = \frac{r}{t^2}$, folglich $m = \frac{r^3}{t^2}$.

Es folgt, daß man überhaupt die Masse eines Planeten, die der Sonne $= 1$ gesetzt, finde, wenn man den Würfel des Abstandes eines seiner Monde durch das Quadrat der Umlaufszeit eben desselben Mondes dividirt, sobald man nämlich irgend eines andern um die Sonne bewegten Planeten Abstand und Revolutionszeit zur Einheit annimmt. Z. B. Venus läuft in 5393 St. um die Sonne, und der 4te Trabant des Jupiters um diesen in $4^{c}0\frac{1}{22}$ St.; also ist jenes Planeten Umlaufszeit 13mal größer, als die dieses Mondes; oder $t = 0,0742716$. Nimmt man nun den Abstand der Venus von der Sonne $= 1$ an, und vergleicht damit den wirklichen Abstand jenes Mondes vom Jupiter, gefolgert aus seinem scheinbaren Abstande $= 8' 16''$, in wiefern er von der Sonne aus gesehen wird; so findet man $r = 0,017290$. Der Quotient nun aus dem Würfel dieser Zahl, durch t^2 dividirt, ist 0,0009370, oder $\frac{1}{1067}$, anzeigend die Jupiters Masse in Vergleich mit der als Einheit angenommenen Sonnen Masse. Auf dieselbe Weise findet man die der Erde $= \frac{1}{331880}$.

Weiß man auf diese Art eines Planeten Masse und sein Volumen in Vergleich mit einem andern Körper, oder um wie vielmal er größer ist, als z. B. die Erde; so hat man seine Dichtigkeit oder sein spezifisches Gewicht, das der Erde = 1 gesetzt, aus $\frac{m}{v}$. So ist die Dichtigkeit des Jupiters, welcher 1425mal größer ist, als die Erde, = $\frac{256}{1425}$, oder beynahe um $\frac{1}{5}$ der Dichtigkeit der Erde. Aus den oben angeführten von Maskelyne am Berge Shehallien angestellten Beobachtungen folgerte Hutton die Densität der Erde zu der des Wassers, wie 4, 5 : 1, die Densität des gewöhnlichen Steines = 2, 5 des Regenwassers angenommen. Glückliche Analogieen hatten den scharfsinnigen Newton vermuthen lassen, die mittlere Dichtigkeit der Erde könne 5 — 6mal größer, als die des Wassers, seyn.

Die Dichtigkeit des Mondes folgert Lalande aus dessen Antheile an der Höhe der Meeresfluth, welchen er = 2, 7 setzt, die Anziehungskraft der Sonne = 1 gesetzt; und berechnet daraus auf obige Weise die Masse des Mondes = $\frac{1}{66}$ der Erdmasse. Daher, wenn man diese Zahl durch das Volumen des Mondes = $\frac{1}{49}$ = 0, 020341 dividirt, man seine Dichtigkeit = 0, 7396, oder = $\frac{3}{4}$ der Dichtigkeit der Erde findet.

Da sich rücksichtlich derjenigen Planeten, um welche sich keine Monde bewegen, so wie dieser selbst, die genannten Stücke nicht auf dieselbe Art berechnen lassen; man aber aus den bekannten Dichtigkeiten sah, daß diese

im

im Verhältniße des Abstandes der Planeten von der Sonne abnehmen; so fand man analogisch auch die Dichtigkeiten der übrigen Planeten. Man findet diese Bestimmungen in der angehängten Tabelle.

Die Schwere ist endlich nichts, als der Effekt, aus der Anziehungskraft, welcher Effekt aus der Geschwindigkeit, mit welcher ein Körper auf einem Planeten fällt, erkannt wird. Will man daher diese Geschwindigkeit des Falls, oder der Schwere eines Körpers auf einem Planeten finden; so darf man nur vermöge des Gesetzes der Gravitation des Planeten Maße durch das Quadrat seines Halbmessers dividiren. Auf diese Art sind die in jener Tabelle angeführten Geschwindigkeiten für die erste Sekunde von Lalande berechnet, indem er die Geschwindigkeit der Erdkörper unter dem Aequator = 15,1037 Fuß mit eines jeden Planeten Masse multiplizirte, und mit dem Quadrate seines Halbmessers dividirte.

Begriff der Perturbationstheorie.

§. 67. Die Regelmäßigkeit der Planeten-Bewegungen um die Sonne, und rücksichtlich der Monde um die Hauptplaneten, erklärten wir nach dem Copernikanischen Systeme unter der Voraussetzung, daß erstere blos gegen die Sonne, als ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkte, und letztere gegen ihre Hauptplaneten schwer seyen. Allein bey aller dieser erklärten Regelmäßigkeit lernten wir mehrere Unregelmäßigkeiten in den Bewegungen der

Planeten kennen, z. B. das Zurückegehen der Aequinoktialpunkte, oder das Vorrücken der Nachtgleichen; das Zurückegehen der Knoten, das Schwanken der Erd- oder Welt-Axe. ... Diese periodischen Unregelmäßigkeiten, welche die Astronomen erste, zweyte Ungleichheiten nennen, und welche keineswegs durch die keplerische und copernikanische Theorie verschwinden, erklären sich einzig aus der allgemeinen Gravitation. Denn sind die Hauptplaneten nicht einzig gegen die Sonne, sondern auch gegen einander schwer; so müssen dadurch nothwendig Unregelmäßigkeiten in denjenigen Bewegungen der Planeten um die Sonne entstehen, welche ihnen zukommen, in wiefern man blos die Anziehungskraft der Sonne als Ursache dieser Bewegungen betrachtet. Aehnliches gilt in Absicht auf die Trabanten.

Newton, der eigentliche Erfinder der allgemeinen Gravitationstheorie, war es, welcher auch zuerst Licht über die Erklärung dieser Ungleichheiten verbreitete, und im dritten Buche seiner Prinzipien einen großen Theil derselben nach seiner Theorie wirklich erklärte. Späteren Mathematikern und Astronomen war indessen die Vervollkommnung der Perturbationsrechnung vorbehalten; in dieser Rücksicht sind vorzüglich Clairaut, Euler, d'Alembert, Lalande, la Grange, la Place, de Lambre, Klügel, Bürg, Schubert zu nennen, welche mittelst des Differential- und Integralcalculs jener Störungsrechnung, wo nicht die Vollendung, doch den größten Grad von Vollkommenheit

ver-

verschafften. Um die Mondstheorie erwarben sich besonders d'Alembert und Euler durch ihre Rechnungen, und Halley, le Monnier, Cassini, de la Caille durch ihre Beobachtungen vorzügliche Verdienste, wodurch Tob. Mayer in Stand gesetzt wurde, die genauesten Mondtafeln zu verfertigen. Von Zach lieferte die genauesten Sonnentafeln, und de Lambre die genauesten Planetentafeln.

Die Aufgabe, die genannten Ungleichheiten aus der Gravitationstheorie zu erklären, nannte man das Problem von drey Körpern, nämlich die Veränderungen in der gegenseitigen Lage und Weite zweyer Körper zu finden, welche dadurch entsteht, daß ein dritter durch seine Anziehungskraft auf beyde wirkt.

Wir können hier gleichsam nur die ersten Grundlinien dieser Auflösung verzeichnen, und dann die Anwendung auf die Erklärung jener Ungleichheiten so kurz, als möglich ist, machen. Newton, welcher nur das Fundament zur Perturbationstheorie legte, keineswegs aber die Störungsrechnung selbst gab, drückt jenes Problem im 1ten B. seiner Prinz. durch das 26te Theorem so aus:

Wenn drey Körper S, P, T (Fig. 60.), deren Anziehungskräfte im duplizirten Verhältniße der Abstände abnehmen, sich wechselseitig anziehen, und die Anziehungskräfte von je zweyen gegen den dritten Körper sich zu einander umgekehrt, wie die Quadrate der Abstände, verhalten: die kleineren Körper P und S aber um den

größe-

grösseren T umherlaufen; so wird der Körper P, welcher um den innersten und grösten T die innere Bahn PAB beschreibt, den Zeiten mehr proportionelle Flächenräume durch den zu T gezogenen Radius vektor PT, und eine sich der Gestalt einer Ellipse (deren Brennpunkt in dem Zusammenstoßungspunkte der von P zu T gezogenen Radien ist) mehr nähernde Figur beschreiben, wenn der grösste Körper T durch jene Anziehungskräfte sollizitirt wird, als wenn er entweder gar nicht angezogen ruhte, oder viel mehr, oder viel weniger angezogen viel mehr oder viel weniger sollizitirt würde.

Diesen Satz beweist Newton für 2 Fälle auf folgende Art: Es sey SK die mittlere Distanz der Körper P und S, und eben diese Linie stelle die beschleunigende Anziehung des Körpers P gegen S bey diesem mittleren Abstande vor. Im duplizirten Verhältniße SK: SP nehme man SL: SK; so wird SL die Anziehung des Körpers P gegen S in jeder Distanz SP vorstellen. Man ziehe den Radius vektor PT, ihm parallel LM, die verlängerte ST in M schneidend; so wird die Anziehung SL in die 2 Anziehungen SM und LM zerlegt. Es wirken daher drey Kräfte auf P: eine zum Mittelpunkte T hinstrebende, und aus der wechselseitigen Anziehung von T und P entsprungene Kraft, vermöge welcher P um den Körper T, er mag nun ruhen, oder durch diese Anziehung zur Bewegung sollizitirt seyn, durch den Radius vektor PT den Zeiten proportionelle Flächenräume und eine Ellipse beschreiben würde, deren Brenn-

punkt

punkt im Mittelpunkte von T ist (§. 59. und §. 61. Zus. 1.) Die andere Kraft ist die aus der Anziehung LM entsprungene Kraft, welche, weil sie von P zu T tendirt, und mit P'I' parallel ist, wenn man die vorige Kraft hinzuthut, mit dieser zusammenfällt, folglich bewirkt, daß auch itzt noch die beschriebenen Flächenräume den Zeiten proportional bleiben. Allein weil diese zweyte Kraft dem Quadrate des Abstandes P'T nicht umgekehrt proportional ist; so bildet sie, mit der ersten Kraft komponirt, eine von diesem Verhältniße abweichende Kraft, und dieß, alles übrige gleich gesetzt, um so mehr, je größer das Verhältniß dieser 2ten Kraft zur 1ten ist. Es wird daher vermöge dieser zusammengesetzten Kraft die Bahn PAB in eben diesem Verhältniße von der Gestalt der Ellipse, deren Brennpunkt in T ist, abweichen.

Nun wird aber die dritte Kraft SM, welche den Körper P nach der mit ST parallelen Richtung zieht, mit den 2 vorigen Kräften eine zusammengesetzte Kraft ausmachen, welche nicht mehr von P gegen T tendirt, und von dieser Tendenz um so mehr abweicht, je größer, alles übrige gleich gesetzt, das Verhältniß dieser 3ten Kraft zu den 2 vorigen ist; in welchem Verhältniße denn auch jene Proportionalität der vom Körper P mit dem Radius vektor PT zu beschreibenden Flächenräume gestört wird. Diese dritte Kraft wird also die Abweichung der Bahn PAB von der Ellipsengestalt sowohl darum vermehren, weil sie nicht von P gegen T gerichtet ist, als auch, weil sie dem Quadrate des Abstandes

PT

PT nicht proportional ist. Woraus denn erhellt, daß die Flächenräume den Zeiten am meisten proportionell seyn müssen, wenn bey den unveränderten 2 ersten Kräften die dritte die kleinste wird, und daß die Bahn PAB sich am meisten der Ellipsengestalt nähere, wenn sowohl die 2te, als vorzüglich die 3te, bey unveränderter erster Kraft die kleinste wird.

Es stelle zweytens SN die beschleunigende Anziehung des Körpers T gegen S vor: wären die Anziehungen SM, SN gleich; so würden diese, indem die Körper T und P gleich und nach parallelen Richtungen gezogen würden, nichts in der Lage dieser Körper zu einander ändern können, welche sich folglich so in Beziehung auf einander bewegten, als wären jene Anziehungen aufgehoben. Und wäre die Anziehung SN < SM; so würde sie von SM den Theil SN aufheben, so, daß nur MN übrig bliebe, wodurch sowohl die Proportionalität der Zeiten und Flächenräume, als die Ellipsengestalt der Bahn gestört würde. Und auf ähnliche Weise würde dieselbe Störung erfolgen, wenn die Anziehung SN > SM wäre, und die Differenz MN wirkte. Hieraus folgt also, daß die Zeiten und Flächenräume sich der Proportionalität, und die Bahn sich der Ellipsengestalt am meisten nähere, wenn die Anziehung MN entweder = 0, oder doch am kleinsten ist, d. i. wenn die beschleunigenden Anziehungen der Körper P und T gegen S hin, so weit möglich sich der Gleichheit nähern; d. i. wenn die Anziehung SN weder = 0, noch kleiner

ist,

ist, als die kleinste unter allen Anziehungen SM, sondern zwischen der größten und kleinsten aller Anziehungen SM gleichsam in der Mitte liegt, d. i. nicht viel größer oder kleiner, als die Anziehung SK, ist, w. z. b. w.

Zweyter Fall. Es bewegen sich die Körper P und S um den größten T in verschiedenen Ebenen; so wird die Kraft LM, weil sie nach der Linie PT, welche in der Ebene der Bahn PAB liegt, wirkt, denselben Effekt, wie vorhin, hervorbringen, und den Körper P keineswegs aus der Ebene seiner Bahn wegziehen. Allein die andere Kraft NM, wirkend nach der mit ST parallelen Richtung, welche folglich, wenn der Körper S nicht in der Knotenlinie existirt, eine Neigung zur Ebene der Bahn PAB hat, wird nebst der schon vorher erörterten Störung der Bewegung in die Länge, auch eine Störung der Bewegung in die Breite hervorbringen, indem sie den Körper P von der Ebene seiner Bahn wegzieht. Diese Störung nun wird bey jeder gegebenen Lage der Körper P und T gegen einander, sich wie jene perturbirende Kraft verhalten, d. i. am kleinsten werden, wenn MN am kleinsten, d. i. wenn die Anziehung SN weder viel größer, noch viel kleiner als SK ist, w. z. b. w.

Nachdem Newton diesen wichtigen Satz, daß nämlich, wenn zwey Körper, wovon der eine sich um den andern bewegt, von einem dritten gleich und nach parallelen Richtungen angezogen werden, diese fremde Kraft im Systeme jener Körper nichts ändere, und daß

eine

eine Ungleichheit in der Bewegung lediglich durch den Unterschied in jenen Anziehungen könne hervorgebracht werden, gleichwie der Mond nur dann in seiner regelmäßigen Bewegung um die Erde gestört wird, wenn er von der Sonne entweder ein wenig mehr oder weniger, als von der Erde, angezogen wird; daß man folglich, um die störende Kraft rücksichtlich eines um die Sonne bewegten Planeten zu finden, wissen müsse, wie stark die fremde Kraft auf die Sonne, und wie stark sie auf den Planeten wirke, — bewiesen hatte, exponirt er in den Folgerungen die meisten Ungleichheiten. Einige der wichtigsten dieser Folgerungen wollen wir kurz anführen:

1. Wenn sich mehrere kleinere Körper P, S, R ... um den größten T bewegen; so leidet die Bewegung des innersten Körpers P keine Störung durch die Anziehungen der äußeren, sobald T eben so von den übrigen im Verhältniße ihrer Anziehungskräfte gezogen und sollizitirt wird, wie die übrigen von einander wechselseitig gezogen werden. Dieß folgt aus dem Satze unmittelbar.

2. Aber im Systeme von drey Körpern T, P, S, wenn die beschleunigenden Anziehungen von je zweyen gegen den dritten im umgekehrten duplizirten Verhältniße der Abstände sind, wird der Körper P mit dem Radius vektor PT um den Körper T seine Flächenräume in der Conjunktion A sowohl, als in der Opposition B schneller beschreiben, als in den Quadraturen C und D. Denn jede Kraft, welche nur den Körper P, nicht aber zugleich auch T urgirt, und welche nicht nach der Richtung

tung PT wirkt, beschleunigt oder retardirt die Beschreibung des Flächenraumes, sie mag nun auf den Planeten gegen oder nach der Ordnung der Zeichen gerichtet seyn. Eine solche Kraft ist die Kraft NM: diese beschleunigt des Planeten P Bewegung bey seinem Uebergange von C nach A bey einer Richtung der Kraft nach der Ordnung der Zeichen; dann strebt sie bis nach D gegen die Ordnung der Zeichen, und retardirt des Planeten Bewegung.

3. Da sich also der Planet P in der Conjunktion und Opposition schneller bewegt, als in den Quadraturen; so folgt, daß auch in diesen seine Bahn krümmer ist, als in jenen. Denn je geschwinder sich ein Körper bewegt, desto weniger weicht seine Bewegung von der geradlinigen ab. Nebstdem ist aber auch die Kraft KL oder NM in der Opposition und Conjunktion direkt entgegengesetzt der Kraft, mit welcher der Körper T den Körper P zieht, jene mindert also diese, und P muß um so weniger von dem geraden Wege abweichen, je schwächer die ihn zu T hin nöthigende Kraft ist.

4. Also wird der Körper P, wenn man von seiner Eccentrizität präscindirt, in den Quadraturen wegen seiner krümmeren Bahn sich weiter von T entfernen, als in der Conjunktion und Opposition. Ist aber die Bahn von P eccentrisch; so kann es geschehen, daß, weil die Eccentricität am größten ist, wenn die Apsiden in den Syzygien sind, der Planet P, wenn er in der oberen Apside (apsis summa, s. Aux, in Beziehung auf den

Mond

Mond apogaeum) angekommen ist, weiter von T in den Syzygien abstehe, als in den Quadraturen.

5. Weil die Centripetalkraft des centralen Körpers T, welche den Planeten P in seiner Bahn erhält, in den Quadraturen durch die hinzugekommene Kraft LM vermehrt, in den Syzygien aber durch die Wegnahme der Kraft KL vermindert, und zwar wegen der größeren Kraft KL mehr vermindert, als vermehrt wird, die Centripetalkraft aber im zusammengesetzten Verhältniße aus dem einfachen direkten des Halbmessers TP und dem umgekehrten duplizirten der periodischen Umlaufszeit (§. 56. Zus. 3.) ist; so erhellt, daß dieses zusammengesetzte Verhältniß durch die Action der Kraft KL vermindert, sohin bey demselben Halbmesser TP der Bahn die periodische Umlaufszeit vermehrt werde, und zwar im subduplizirten Verhältniße, in welchem jene Kraft vermindert wird: — würde sohin dieser Halbmesser entweder wachsen oder abnehmen; so würde die periodische Umlaufszeit mehr zunehmen, oder weniger vermindert werden, als im sesquiplizirten Verhältniße jenes Halbmessers (§. 56. Zus. 6.). Wenn jene Kraft des centralen Körpers allmählig nachlassen würde; so würde sich der beständig weniger angezogene Planet P immer mehr vom Mittelpunkte T entfernen, im Gegentheile sich diesem nähern müssen.

Wenn also die Action des entfernten Körpers S, wodurch jene Kraft vermindert wird, wechselweise zu- und abnimmt; so wird auch der Radius TP abwechselnd wach-

wachsen und abnehmen, und daher die periodische Umlaufszeit größer oder kleiner werden nach dem zusammengesetzten Verhältniße aus dem sesquiplizirten des Radius und dem subduplizirten Verhältniße, in welchem jene Centripetalkraft des Körpers T wegen der Zu- oder Abnahme der Action des entfernten Körpers S, wächst oder abnimmt.

6. Aus dem Vorausgeschickten folgt auch, daß die große Axe der von P beschriebenen Ellipse, oder die Apsidenlinie abwechselnd vor und zurückegehe, mehr aber während der einzelnen Umläufe des Körpers nach der Ordnung der Zeichen fortrücke. Denn die Kraft, wodurch P in den Quadraturen, wo MN verschwunden ist, gegen T hin gezogen wird, besteht aus LM und der Centripetalkraft, womit T den Planeten P anzieht. Nimmt nun der Abstand PT zu; so nimmt fast in demselben Verhältniße die erste Kraft LM zu, aber die andere Kraft nimmt in jenem duplizirten Verhältniße ab, also nimmt die Summe beyder Kräfte in einem kleineren Verhältniße, als dem duplizirten des Abstandes PT ab, macht also, daß die obere Apside zurückegehe.

Aber in der Opposition und Conjunktion ist die Kraft, welche den Körper P gegen T hin zieht, der Unterschied zwischen der Kraft, womit T den Körper P anzieht, und der Kraft KL. Weil nun KL beynahe im Verhältniße der Distanz PT wächst; so nimmt jener Unterschied in einem größeren Verhältniße, als dem duplizirten dieses Abstandes ab; macht folglich, daß die obere Apside nach

der

der Ordnung der Zeichen vorschreite. In den Stellen zwischen den Syzygien und Quadraturen hängt die Bewegung dieses Punktes von der Verbindung dieser beyden Ursachen ab, so daß nach dem Ueberschusse der einen oder der andern jener Punkt bald vor- bald zurückegeht. Da aber die Kraft KL in den Syzygyen beynahe noch einmal so groß ist, als die Kraft LM in den Quadraturen; so wird jener Ueberschuß bey jeder einzelnen Revolution des Körpers P auf Seite der Kraft KL seyn; weßwegen denn die obere Apside nach der Ordnung der Zeichen fortrücken wird.

7. Da also jenes Fortschreiten der oberen Apside am größten ist, wenn das Verhältniß der Kraft in der oberen Apside zur Kraft in der unteren (apsis ima) am meisten abweicht von dem umgekehrten duplizirten Verhältniße der Abstände; so folgt, daß die Apsiden in ihren Syzygien wegen der hinweggenommenen Kraft KL oder NM — LM geschwinder fortrücken, als in den Quadraturen wegen der hinzugekommenen Kraft LM.

Anwendung.

Aus den Zusätzen 2. 3. und 4. erklärt Newton die schnellere Bewegung des Mondes; den im Verhältniße zur Zeit beschriebenen größeren Flächenraum; des Mondes weniger krumme Bahn, und seine größere Erdnähe in den Syzygien, als in den Quadraturen, in wiefern die Bewegung der Eccentrizität nichts hindert. Denn die Eccentrizität ist am größten, wenn das Apogäum des

Mon-

Mondes in den Syzygien, — am kleinsten aber, wenn jenes in den Quadraturen eintrifft, weßwegen denn der Mond im Perygäum sich geschwinder bewegt, und uns näher ist, in der Erdferne aber sich langsamer bewegt, und weiter von uns entfernt ist in den Syzygien, als in den Quadraturen. Jene Veränderung der Eccentrizität der Mondsbahn nennen die Astronomen die Erhebung, Evektion, von der Sonne, nämlich bewirkt, wenn sie dem Apogäum oder Perigäum entspricht, oder wenn die Apsidenlinie des Mondes mit der Linie der Syzygien zusammentrifft, in welchem Falle denn der Erde Centralkraft, welche am schwächsten in der Syzygie ist, die zugleich bey der Erdferne eintrifft, die größte, im Gegentheile aber die geringste Verminderung leidet. Daher hat man in jenem Falle die größte Differenz zwischen der Centralkraft für die Erdferne, und der Centralkraft für die Erdnähe, wodurch sich denn der Unterschied in den Abständen vermehren, d. i. die Eccentrizität am größten seyn muß.

Aus Zus. 6. und 7. erklärt Newton das Fortrücken des Apogäums, und zwar dessen geschwinderes Fortgehen in seinen Syzygien, als in den Quadraturen. Spätere Astronomen haben bewiesen, daß zu dieser Bewegung der Apsiden in Ansehung unseres Mondes und der Satelliten auch die abgeplattete Gestalt des Hauptplaneten beytrage. Von dem Fortrücken der Aphelien behauptete Newton, daß die Ungleichheiten rücksichtlich derselben sehr klein seyen, weßwegen er sie nicht in Betrachtung ziehe. Allein

lein heut zu Tage werden auch dieſe um ſo weniger vernachläßigt, je mehr Leichtigkeit und Schärfe zu ihrer Berechnung die höhere Analyſis gegenwärtig den Aſtronomen darbietet. Die Ungleichheiten in Anſehung der Satelliten leitet Newton aus der Erklärungsart dieſer Ungleichheiten in Betreff unſeres Mondes ab.

Aus dem Satze ſelbſt folgert er weiter die nothwendigen Veränderungen in der Mondsbreite, welche größer in den Quadraturen, als in den Syzygien iſt.

Die Größe, um welche die wahre Länge des Mondes 45° nach ſeiner Conjunktion mit der Sonne gewachſen iſt, nennt man die Variation. Ehe nämlich der Mond zur Conjunktion kömmt, wird ſeine Bewegung dadurch immer mehr beſchleunigt, daß er mehr, als die Erde, von der Sonne angezogen wird. Dieſe hiedurch erlangte Geſchwindigkeit dauert noch über die Conjunktion hinaus fort, bis er von dieſer 45° entfernt iſt.

Die jährliche Gleichung (aequatio annua), welche bis auf 11′ geht, rührt ebenfalls von der Anziehungskraft der Sonne her, indem ſie bey ihrem kürzeſten Abſtande von der Erde den Mond ſtärker zieht, als in der Erdferne; daher wird im erſtern Falle die Centralkraft des Mondes gegen die Erde vermindert; er entfernt ſich von ihr, und der Durchmeſſer ſeiner Bahn wird am größten, und daher die Dauer ſeiner Revolution länger, indem die Quadrate der Umlaufszeiten ſich

wie

wie die Würfel der Durchmesser der Bahnen verhalten (§. 56. Zus. 8.). Ist die Sonne am Ende des Jahres wieder zu demselben Punkt zurückegekommen; so wiederholt sich dieses.

Die Ursache ferner, warum die Orte der Knoten aller Planeten eine rückgängige Bewegung haben, welche beym Monde so merklich ist, daß die Verrückung der Knoten jährlich 19° beträgt, und diese in 18 Jahren durch alle Zeichen des Thierkreises umherkommen, — die Ursache folglich, warum die Knotenlinien der Planetenbahnen von Zeit zu Zeit ihre Lage gegen die Fixsterne, gleich den Apsidenlinien, verändern, sich wider die Ordnung der Zeichen um die Sonne drehen, liegt ebenfalls in der wechselseitigen Gravitation aller Weltkörper. Denn ein angezogener Planet, dessen Bahn in einer andern Ebene liegt, als die Bahn des anziehenden, muß die Ebene dieses letztern jedesmal etwas früher durchschneiden, als es bey seiner vorhergehenden Revolution geschehen war.

Ist z. B. DN (Fig. 61.) die Ecliptik, LABN die Mondsbahn, in welcher der Mond den Bogen LA durchlaufen hat; so sucht die Sonne, welche in der Ebene der Ecliptik DN steht, den Mond beständig zu dieser Ebene hinzuziehen. Während also dieser einen dem Bogen LA gleichen Bogen AB in seiner Bahn zu durchlaufen strebt, wird er, sich der anziehenden Sonne um die Größe AE nähernd, durch die Diagonale AC bewegen müssen, so, daß nun seine vorige Bahn verrückt wird,

und er sich in der neuen ACM bewegt; der Knoten ändert daher beständig seine Lage, und rückt von N nach M im entgegengesetzten Sinne der Mondsbewegung fort, deren Richtung von A nach N war. Es ist also die Bewegung jedes Planeten in Beziehung auf die Bahn DN des störenden Planeten rückgängig.

Eine der rückgängigen Bewegung der Knoten der Planeten ähnliche Ungleichheit ist das Zurückegehen der Aequinoktialpunkte oder das Voreilen der Nachtgleichen (§. 12.), hervorgebracht durch die Anziehungskraft der Sonne und des Mondes in Beziehung auf das Erdsphäroid. Dieses schwerste Problem, mit dessen Auflösung sich auch Euler und Simpson beschäftigten, und rücksichtlich welcher Lalande sagt: Newton s'y étoit mépris — löste zuerst d'Alembert vollständig auf. Gleichwie nämlich ein in seiner Bahn fortschreitender Planet beständig von derselben durch andere Planeten zurückegezogen wird; so werden auch diejenigen Theile des Erdsphäroids, welche gegen den Aequator hin erhoben, mit diesem sich umwälzen, durch die Seitenanziehungen der Sonne und besonders des Mondes von ihrer natürlichen Bewegung gerade so abgelenkt, als wenn man die Menge der Theile, um die das Erdsphäroid die Erdkugel übertrifft, zu einem Ring gesammelt, und gleichsam aus einer Menge Monde zusammengesetzt vorstellte, welche sich in 24 St. um die Erde bewegten. Auf diesen Ring, oder auf diese Monde wird nun erstens wegen ihrer größeren Nähe, sowohl die Sonne,

ne, als unser Mond eine stärkere Anziehung äußern, als gegen die übrigen entfernteren Erdtheile; allein die Wirkung dieser Kraft muß zweytens veränderlich seyn, weil der größte Durchschnitt der größeren Erdmaße (des Aequators) beym Laufe der Erde um die Sonne, oder beym Laufe des Mondes um die Erde eine verschiedene Lage gegen diese Himmelskörper erhält. Daher werden denn jene mehrere Erdtheile des in 2 Theile getheilten Erdsphäroids gegen die rechte Seite (von der theilenden Ebene der Sonne oder des Mondes aus betrachtet) mehr angezogen, als an der linken; folglich leidet die Lage der Erdaxe gegen die Axe ihrer Bahn am Mittelpunkte der Erde rechts herum eine Veränderung, und die Aequinoktiallinie weicht daher nach Westen zurücke. Die Wirkung der Sonne wird hiebey zu 16″, und die des Mondes zu 34″ angegeben. Allein diese muß nicht nur darum ungleich seyn, weil sich die Lage der gegen die Erdbahn schief liegenden Mondsbahn wegen der Verrückung der Knotenlinie beständig ändert, so, daß sie erst nach 18 J. gegen den Aequator wieder dieselbe Stellung erhält, sondern auch darum, weil die Anziehungskräfte der Planeten nach la Place mit in Rechnung gebracht werden müssen.

Aus derselben Anziehungskraft des Mondes gegen das Erdsphäroid ist auch die Nutation der Erdaxe zu erklären, welches Wanken dieselbe Periode von 18 J. hat, wie jene Ungleichheit im Vorrücken der Nachtgleichen. Hätte der Mond immer dieselbe Abweichung,

wann er demselben Punkte des Aequators entspricht; so würde jener Effekt sowohl in Ansehung der Präzession, als der Nutation gleichförmig seyn; allein wegen der Bewegung seiner Knoten entfernt er sich in seinen verschiedenen Revolutionen bald mehr, bald weniger vom Aequator, wirkt also auf diesen bald mit größerer, bald mit geringerer Kraft. Wenn z. B. der ☊ des Mondes in 0°♈ (Fig. 62.) fällt; so geht die größte Entfernung QL des Mondes (dessen Bahn ♈LA♎) vom Aequator bis auf $28°\frac{3}{4}$; aber wenn 9 Jahre nachher der aufsteigende Knoten in 0°♎ ist; so beträgt des Mondes Entfernung vom Aequator QB nur $18°\frac{1}{4}$ auf jede Umwälzung, indem seine Bahn zwischen dem Aequator QB und der Ecliptik liegt: dann ist des Mondes ganze Anziehungskraft auf das Erdsphäroid während einer Revolution viel kleiner, indem überhaupt jene Anziehungskraft von der Abweichung abhängt. Es muß also nothwendig in der jährlichen Präzession in dem Zeitraume von 18 J. eine Ungleichheit statt finden, und das Wanken der Erdaxe von 9″ hievon eine Folge seyn.

Effekt dieser Nutation ist das Wachsen der Schiefe der Ecliptik um 9″, wenn die Länge des Mondsknoten = 0 ist; gerade dann nämlich hat der Mond seine größte Entfernung vom Aequator und zugleich auch die größte Kraft, des Aequators Ebene, folglich die Schiefe der Ecliptik zu ändern. Es sey in Fig. 63. ♈G♎ die Ecliptik, ♈M♎ der Aequator, und EG die Bahn des Mondes; wenn nun dessen ☊, statt in G zu seyn, in ♈

ist

ist, folglich der Mond sich am weitesten nördlich vom Aequator entfernt, dann zieht er den Erdäquator von dieser Seite her mit mehr Kraft. Es scheint, daß dann der Aequator EM sich der Ecliptik NG nähern müsse; allein der Winkel wird dann am größten, und man findet die Schiefe der Ecliptik = 23° 28′ 9″ statt 23° 28′ 0″. Um nämlich diese Schwierigkeit zu beseitigen, muß man die Art, wie der Mond auf den Erdäquator wirkt, um die Lage seiner Ebene zu ändern und die Bewegung seiner Knoten hervorzubringen, in Betrachtung ziehen. Um eine Ebene aus ihrer Lage zu rücken, ist nothwendig, daß der anziehende Körper sich außerhalb jener Ebene befinde, und von der Seite wirke. Wenn also der Mond im Punkte E den Aequator ES durchschneidet; so ist seine Wirkung in Ansehung der Präzession = 0; diese Wirkung ist aber am größten, wenn er in G oder L (Fig. 62.) steht, und überhaupt je mehr sich der Mond vom Aequator entfernt, desto mehr wirkt er auf denselben. Auch wird nicht sogleich dann, wann der Mond auf den Erdäquator wirkt, diese Wirkung sogleich, sondern erst 90° hernach merklich. Wenn MO (Fig. 63.) die tägliche Bewegung des Aequators für 1″ Zeit, und Of das Maß der Kraft vorstellt, durch welche der Aequator zur Bewegung gegen die Seite des auf seine Ebene senkrecht wirkenden Mondes hin sollizitirt wird; so wird der Aequator, dessen Winkel sich in M ändert, der Diagonale Mf folgen. Allein erst in B oder gegen die Aequinoctien hin wird dieser Effekt sich offen-

offenbaren: die Schiefe NS der Ecliptik, auf dem Kolur der Sonnenstillstände gemessen, wird in eben dem Grade mehr an jener Wirkung Theil nehmen, als sich der Knoten vom Solstitialpunkte entfernt, so, daß jene Wirkung am bemerkbarsten wird, wann der Knoten im Aequinoktialpunkte angekommen ist. So findet sich also die Ecliptik am weitesten vom Aequator entfernt, wann sie durch des Mondes Action einander am nächsten zu seyn scheinen müssen.

Anhang.

Vom Kalender.

Geschichte des Kalenders.

§. 68. Die Aegyptier hatten ihren Kalender blos nach dem Sonnenlaufe, die Araber nach dem Mondlaufe eingerichtet: allein die Griechen suchten bey Aufstellung ihres Kalenders die Bewegungen beyder Himmelskörper einem Orakelspruche gemäß zu vereinigen. Nach vielen vergeblichen Entwürfen schlugen endlich Meton und Euctemon die berühmte Meton'sche Periode von 19 Jahren (Enneadekaeteride) vor. 12 dieser Jahre begriffen 12, 7 J. 13, und alle 19 J. 235 synodische Mondsmonate; ferner bestanden 125 dieser Monate aus 30, 110 aus 29, mithin die ganze Periode

aus

aus 6940 Sonnentage. Nun hat zwar das tropische Sonnenjahr, oder die Zeit, innerhalb welcher die Sonne die Zeichen des Thierkreises zu durchlaufen scheint, 365 T. 5 St. 48′ 48″. Da man aber das gemeine oder bürgerliche Jahr nur mit einem ganzen Tage anfangen lassen kann; so setzte Meton dieses bürgerliche Jahr = 365 T. 6 St. Unter dieser Voraussetzung vereinigte seine Periode wirklich ziemlich glücklich den Lauf der Sonne und des Mondes. Denn 19 bürgerliche Jahre enthielten nun 6939 T.; aber auch 235 synodische Mondsmonate oder Mondswechsel (deren jeder = 29 T. 12 St. 44′ 03″) machen 6939 T. 16 St. 31′ 45″ aus. Diese Periode, welche von den Griechen im 433sten J. vor C. G. am 16ten Jul. 19 T. nach dem Sommersolstitium angenommen wurde, fieng mit einem Neumonde an, welcher auf diesem Tage um 7 Uhr 43′ Abends eintraf, und ihr erster Tag wurde vom Untergange der Sonne an diesem Tage gerechnet. Die Griechen schätzten diese, wahrscheinlich von den morgenländischen Gelehrten entlehnte Entdeckung, daß nämlich der Zeitraum von 19 Sonnenjahren 235 Mondsmonate befasse, so hoch, daß sie die Rechnungen hierüber mit goldenen Buchstaben eingruben, weßwegen denn jede jener 19 Zahlen goldene Zahl genannt wurde.

Allein, abgesehen davon, daß das bürgerliche Jahr bey dieser Periode zu hoch angenommen war, fallen nach ihr auch die Neumonde am Ende von 310 J. einen Tag zu früh. Daher verbesserte der Astronom Kallip-

pus

pus schon 102 J. nachher diese Periode. Er nahm nämlich 4 jener Meton'schen Perioden oder Cykeln, d. i. 76 J. zusammen; diese genauere Reihe, welche, indem Kallipp von 4. 6940 = 27760 T. einen Tag wegließ, nur 27759 T. und in diesen 940 Mondwechsel (= 27758 T. 18 St. 9') enthielt, so, daß also der Unterschied nur 5 St. 52' betrug, heißt die Kallipp'sche Periode. Diese wurde im 331sten J. vor C. G. im 7t. J. der 6t. Meton'schen Periode eingeführt. Nach ihr haben die griechischen Astronomen ihre Beobachtungen angegeben. Allein diese Reihe läßt eine zu große Abweichung vom Sonnenlaufe, wenn sich diese gleich in der ganzen Periode aufhebt, in den einzelnen Jahren zu. Weil z. B. das erste J. nur 354 T., also 11 T. weniger, als das tropische Sonnenjahr enthielt, demnach das zweyte J. um 11 T. zu früh anfieng; so mußte nach ihr die Nachtgleiche, wenn diese im vorigen J. am 20sten März eingetroffen war, nun erst am 31sten März angegeben werden. So konnte in dieser Periode der Anfang der Jahrszeiten durchaus keinen festen Standpunkt haben.

Die dritte berühmte Zeitrechnung ist die Julianische. Um die Nachtgleichen wieder auf ihre Stelle zu bringen, und darauf zu erhalten, verbesserte Julius Cäsar auf den Rath des Scriba, M. Flavius und des griechischen Philosophen Sosigenes im 45sten J. der christlichen Zeitrechnung den Kalender dadurch, daß er die Größe eines Sonnenjahres auf 365 T. 6 St.

festsetzte, und daher bestimmte, daß, weil diese im gemeinen Jahre vernachläßigten 6 St. jedes 4te Jahr einen Tag ausmachen, auch jedes 4te bürgerliche Jahr ein Schaltjahr (annus bissextilis), oder ein J. von 366 T. seyn, und zwar, daß dieser Schalttag (dies intercalaris) nach dem 23sten Febr. gesetzt werden sollte, indem man in einem solchen Jahre nach römischer Sitte zweymal zählte „Sexto Calendas martias". Dabey wurden, um die Frühlingsnachtgleiche wieder an ihre Stelle zu bringen, zwischen dem Nov. und Dec. des Verbesserungsjahres noch 2 Monate eingeschaltet. Das erste Julian. Jahr war das J. 709 nach Erbauung Roms, und zwar ein Schaltjahr, welches sich mit einem Neumonde anfieng. Das römische Reich bediente sich dieser Zeitrechnung, welche man auch Kalender alten Styls zu nennen pflegt, bis zu seinem Untergange; die christliche Kirche im Occident bis 1582 n. C. G., und die orientalische Kirche behält denselben noch gegenwärtig bey.

Das Julianische Jahr (= $365\frac{1}{4}$ T.) war um 11′ 12″ gegen das Sonnenjahr zu groß. Dieser fehlerhafte Ueberschuß betrug im J. 1582 der christl. Zeitr. 12 T. 15 St. 42′. Weil nämlich die christl. Zeitr. mit dem J. 754 nach Erb. R. anfängt, das 1ste Jul. Jahr aber das 709t. nach Erb. R. oder das 45ste J. der christl. Zeitr. ist; so war das J. 1582 das 1627te nach dem 1sten Jul. J., und $11\frac{1}{5}$′. 1627 = jenem angegebenen Ueberschusse. Nun hatte man zur Zeit der Nicäischen Kir-

Kirchenversammlung im J. 325 n. C. G. wegen Regulirung der Zeit der Osterfeyer schon 3 Tage weggelassen; es blieben daher im J. 1582 noch 9 T. 15 St. 42′ von jenem Ueberschusse zu tilgen. Aber Pabst Gregor XIII, um die Frühlingsnachtgleiche wieder auf den 21t. März, an welchem Tage sie zur Zeit jener Kirchenversammlung eingetroffen war, wieder zurückezuführen, verordnete, daß 10 T. aus dem October jenes Jahres ausgeworfen werden sollten; daher schrieb man den 5t. Oct. jenes Jahres den 15t. Oct. Zugleich wurde die Dauer des Sonnenjahres zu 365 T. 5 St. 49′ 12″ bestimmt. Weil nun dieß vom Julian. J. um $10'\frac{4}{5}$, also in 400 J. um 3 T. abweicht; so wurde festgesetzt, daß in Zukunft unter 4 auf einander folgenden Sekularjahren, welche nach dem Jul. Kalender allzeit Schaltjahre waren, drey gemeine, und nur das vierte ein Schaltjahr seyn sollte. So ist unter 1600, 1700, 1800, 1900 nur 1600 ein Schaltjahr. Dadurch wurde das Fortrücken des Tages der Nachtgleichen verhindert. Ungeachtet nun bey Bestimmung dieses Gregorianischen, oder Kalenders neuen Styls die Dauer des Sonnenjahres um 24″ zu groß angenommen wurde; so kann doch dieser Fehler, welcher erst in 3600 J. einen Tag beträgt, eine sehr lange Zeit hindurch keine merkliche Verrückung der Jahrszeiten verursachen. Uebrigens hatten Anton Lili und Christoph Clavius, welcher auch die Exposition und Vertheidigung dieses Kalenders in seinem Werke „de Calend. Gregor. Romae

Assyrische und Medische Regenten.	Jahre.	Summe.
Nabonasar	14	14
Nadius	2	16
Chinzirus und Porus	5	21
Jugäus	5	26
Mardokempad	12	38
Arkian	5	43
Erstes Interregnum	2	45
Belibus	3	48
Apronadius	6	54
Rigebelus	1	55
Mesestimordak	4	59
Zweytes Interregnum	8	67
Assaradin	13	80
Saosduchin	20	100
Chyniladan	22	122
Nabopallasar	21	143
Nabokolasar	43	186
Iloarudanus	2	188
Nirikassolasar	4	192
Nabonadius	17	209

Persische Regenten.	Jahre.	Summe.
Cyrus	9	218
Cambyses	8	226
Darius I.	36	262
Xerxes	21	283
Artaxerxes I.	41	324
Darius II.	19	343
Artaxerxes II.	46	389
Ochus	21	410
Arogus	2	412
Darius III.	4	416

Griechische Regenten.	Jahre.	Summe.
Alexander d. Mac.	8	424
Philippus Aridäus	7	7
Alexander II.	12	19
Ptolemäus d. Lagide	20	39
Ptol. Evergetes I.	25	102
Ptol. Philopater	17	119
Ptol. Epiphanes	24	143
Ptol. Philometor	35	178
Ptol. Evergetes II.	29	207
Ptolemäus Soter	36	243
Dyonisius	29	272
Cleopatra	22	294

Römische Regenten.	Jahre.	Summe.
August	43	337
Tiber	22	359
Cajus	4	363
Claudius	14	377
Nero	14	391
Vespasian	10	401
Titus	3	404
Domitian	15	419
Nerva	1	420
Trajan	19	439
Adrian	21	460
Antonin	23	483
Marcus u. Comodus	32	515
Severus	25	540
Antonin	4	544
Alexander	13	557
Maximin	3	560
Gordian	6	566
Philippus	6	572
Decius	1	573
Gallus	3	576
Gallien	15	591
Claudius	1	592
Aurelian	6	598
Probus	7	605
Carus	2	607
Diokletian	20	627

mae 1603“, und in seinen „Opp. mathem. Mogunt. 1612. T. V“ — übernahm, an diesem Geschäfte den größten Antheil. Die evangelischen Stände führten erst im J. 1700 den verbesserten Kalender ein, welcher vorzüglich in Bestimmung der Feyer des Osterfestes von dem Gregorianischen abwich, bis sie endlich auf ein kayserl. Patent vom 7ten Jun. 1776 den Kalender neuen Styls annahmen. England und Schweden, jenes im J. 1752, dieses 1753, hatten schon den verbesserten Kalender angenommen, so daß unter den europäischen, christl. Völkern der alte Styl nur noch in Rußland üblich ist.

Ptolomäus Zeitrechnung.

§. 69. Ptolomäus gebraucht in seinem Almagest die ägyptischen Jahre von 12 Monaten, jeden Monat von 30 T., mit einem Zusatze von 5 T. (ἐπαγομένας) am Ende des Jahres. Um diese Jahre zu bezeichnen, bediente er sich der Nabonasarischen Aere. Ναβονασσαρ, im griechischen Almagest nur mit σ geschrieben, war Gründer und erster König des babylonischen Reichs nach der 4t. und letzten assyrischen Monarchie, um welche Zeit er sich der Stadt Babylon bemächtigte. Der von ihm genannten Aere verschafte Ptolomäus durch die an sie geknüpften astronomischen Beobachtungen eine Gewißheit, welcher sich keine andere Zeitrechnung der Alten rühmen kann. Ihre Epoche, oder der erste Tag des ersten Nabonasarischen Jahres,

wel-

welcher der erste Thoth ist, wird von allen Chronologen einstimmig auf Mitwochen, den 26sten Febr. des Jahrs 3967 der Julianischen Periode, (eine Reihe von 7980 J., von ihr wird am Ende gesprochen) oder auf das J. 747, oder 746 vor C. G. gesetzt, wenn man mit den Astronomen das Jahr der Geburt Christi = 0 setzt. Herr Ideler prüfte neuerdings in seinem für Chronologie vorzüglichen Buche „Historische Untersuchungen über die astronom. Beob. der Alten — Berlin b. Quien 1806" — diese Epoche, und fand sie mit La Place richtig.

Nach Ideler's Regel muß man, um ein gegebenes Nabonasarisches Jahr auf die Julianische Periode zu bringen, die im Schema notirten Zahlen zu jener Zahl addiren, die Summe giebt zugleich das J. der Jul. Periode. Weil nun das erste J. der christl. Zeitr. auf das J. 4714 dieser Periode fällt; so darf man von dieser Zahl nur die gegebene Jahrzahl der Jul. Per. abziehen, um die Jahre vor C. G., oder wenn jene größer, als diese ist, 4713 von der gegebenen Jul. Jahrzahl abziehen, um die Jahre nach C. G. zu erhalten. Z. B. auf welches Jahr unserer Zeitrechnung fällt das J. 2554 der Nabon. Aere? Es ist 2554 + 3964 — 4713 = 1805 n. C. G.

Nabon. Jahre		Addiren zum gegeb. Nabon. J.
von	bis	
1	227	3966
228	1688	3965
1689	3149	3964

Es

Es ist aber nicht genug, das Jahr zu kennen, sondern man muß auch wissen, wann es seinen Anfang nimmt. Um das Julianische Datum des 1sten Thoth zu bestimmen, giebt Ideler folgende Vorschrift: man dividire die gegebene Nabon. Jahrzahl durch 4, subtrahire den Quotus von 57 (= 31 + 26 = der Anzahl der Tage, welche vom 1sten Jan. bis den 26. Febr. verflossen sind). Der Rest zeigt den laufenden Tag des Jul. Jahrs, mit welchem das ägyptische oder der 1ste Thoth beginnt. Ist der Quotus selbst 57; so giebt der Rest = 0 zu erkennen, daß der 1ste Thoth mit dem 31sten Dec. zusammentrifft. Ist der Quotus ⌉57; so subtrahire man ihn von 422 = 57 + 365, oder von 423 = 57 + 366, je nachdem das Jahr der Jul. Per., auf welches der 1ste Tag des Nabon. Jahres fällt, ein gemeines oder ein Schaltjahr ist. Diese Regel gilt bis zum J. 1688; vom Jahr 1689 an verfährt man so: Bleibt bey der Division der Nabon. Jahrz. der Rest 2 oder 3; so ziehe man den Quotienten von 787 = 422 + 365 ab. Bleibt aber 1 oder 0 als Rest; so subtrahire man den Quot. von 788 = 422 + 366. In diesem Falle erhält man den laufenden Tag des Jul. J., bis zu welchem der 1ste Thoth zurückegewichen ist. Nennt man obigen Quot. aus der Nabon. Zahl durch 4 = q; so geben folgende 3 Tafeln eine Uebersicht über die gegebenen Regeln.

1)

Nabon. J. v. 1 — 227	laufende Jul. Tage
57 — q	= 31 Dec.
57 — 57	

2)

Nabon. Jahre v. 228 — 1688	
422 — q	im gem. J.
423 — q	im Schaltj.

3)

Nabon. J. v. 1689 an	Wenn der Rest
787 — q	2 oder 3
788 — q	0 oder 1

Mit diesen Regeln kann man nun alle Zeitmomente der Nabon. Aere auf die unserer christl. Zeitr. reduziren. Zur Bequemlichkeit dienen noch folgende 2 Taf.

4)

Januar	1	Sept.	244
Febr.	32	Octob.	274
März	60	Nov.	305
April	91	Dec.	335
May	121	Jan.	366
Jun.	152	Febr.	397
Jul.	182	März	425
Aug.	213	Apr.	456

5) Namen der ägypt. Mon. mit den laufenden Tagen.

Θωθ	0	Φαρμωθι	210
Φαωφι	30	Παχων	240
Αθυρ	60	Παϋνι	270
Χοιακ	90	Ἐπιφι	300
Τυβι	120	Μεσορι	
Μεχιρ	150		
Φαμενωθ	180		
Ergänzungstage	360		

Im Schaltj. muß in Taf. 5. ein Tag weniger gerechnet werden.

Beysp. 1. Auf welchen Tag der christl. Aere fällt der 1ste Thoth des Nabon. Jahres 887? Nach der oben zuerst gesetzten Taf. ist 887 + 3965 = 4852. Diese ohne Rest mit 4 dividirbare Jahr ist ein Schaltj.; davon nun 4713 abgezogen, folgt das J. 139 nach C. G. Ferner 887 durch 4 dividirt, giebt zum Quot. 221 = q. Nach Taf. 2) ist 423 — 221 = 202 laufende Tage. Nach Taf. 4). fällt der 1ste Jul. auf 183 lauf. T., weil das vorgegebene J. ein Schaltj. ist. Bis zu 202 T. sind noch 19 T., folglich ist 202 T. der 20te Jul., mit welchem sich also das 887t. Nabon. J. 139 J. n. C. G. anfängt.

Bey-

Beysp. 2. Das Nabon. J. 2554 ist das J. 1805 n. C. G. Will man nun den Monatstag finden, an welchem dieses J. beginnt; so findet man 1) $q = \frac{2554}{4}$ $= 638$, daher nach Taf. 3) $787 - 638 = 149$ laufende T., und da nach Taf. 4) 121 auf den 1sten May treffen, so fällt dieses Jahres Anfang auf den 29t. May alten, oder 10t. Jun. neuen Styls.

Auch kömmt im Almageſt nicht selten der Fall vor, daß das Datum einer Beobachtung nicht an diese Aere geknüpft ist, sondern öfters nur nach Regentenjahren oder nach Jahren seit Alexanders Tod bezeichnet wird. Allein die Regentenjahre vertraten ganz die Nabon. J., indem eine Zeittafel „κανὼν βασιλέων oder βασιλειῶν“ mit einem Blicke den Zusammenhang von beyderley Jahren vor Augen stellte. Die III am Ende des Buches beygehängte Taf. enthält diesen Kanon der Regenten oder der Regierungen: der Zahlenkolumnen erste, Jahre überschrieben, giebt die Dauer der einzelnen Regierungen, und die zweyte die Regierungsjahre eines jeden Regenten und aller vorhergehenden zusammengenommen. So bedeuten die Zahlen 8 und 424 neben Alexander von Macedonien, daß er 8 J. und zwar von 417 — 424 seit Nabonasar regiert hat. Mit Phil. Aridäus fängt eine neue Zahlenreihe an, welche die seit dem Antritte seiner Regierung verflossenen Jahre bemerkt. Um diese auf Jahre seit Nabonasar zu bringen, muß man die 424 addiren, wel-

welche bis auf Alexanders Tod gerechnet werden. So gehören dem Augustus die J. 295 — 337 seit Phil. Arid., oder die J. 719 — 761 seit Nabon.

Die Vergleichung dieses Kanons mit dem Almagest zeigt, daß diese J. dieselben ägyptischen sind, nach welchen man die Nabon. Aere zählt. Z. B. 3 von Agrippa und Menelaus beobachtete Fixsternbedeckungen sind im 12. J. Domitian's und im 1sten Trajan's erfolgt. Nach dem Kanon sind diese J. 404 + 12 = 416 und 420 + 1 = 421 Jahre seit Phil. Arid., oder, wenn man noch 424 dazu addirt, 840 und 845 Jahre seit Nabonasar; eben so hat sie auch Almagest. (Man vergl. monatl. Corres. 1807. May. Apr.)

Die verschiedenen Cykeln in Beziehung auf den Kalender.

1) Der Mondcykel — die goldene Zahl und die Epakte.

§. 70. Unter Cykel (cyclus) versteht man überhaupt eine in sich immer wieder zurückekehrende Reihe von Jahren. Der Mondcykel (cycl. lunaris) ist die in sich zurückekehrende Reihe von 19 Jahren, nach deren Verlauf die Neumonde wieder auf dieselben Tage des bürgerlichen Jahres fallen. Dieser Cykel ist die im §. 68. erklärte Periode des Athenienser Meton. Daß dieser Cykel nicht volle Genauigkeit gebe, wurde eben dort, so wie die Kallipp'sche Verbesserung angeführt.

Da

Immerwährender Gregorianischer Kalender

um die Neumonde, die Wochentage und die beweglichen Feste zu finden.

M. T.	Januar. Epakten.	B. G.	Februar. Epakten.	B. G.	März. Epakten.	B. G.	April. Epakten.	B. G.	May. Epakten.	B. G.	Junius. Epakten.	B. G.
1	*	A	XXIX	D	*	D	XXIX	G	XXVIII	B	XXVII	E
2	XXIX	B	XXVIII	E	XXIX	E	XXVIII	A	XXVII	C	25. XXVI	F
3	XXVIII	C	XXVII	F	XXVIII	F	XXVII	B	XXVI	D	XXV. XXIV	G
4	XXVII	D	25. XXVI	G	XXVII	G	25. XXVI	C	25. XXV	E	XXIII	A
5	XXVI	E	XXV. XXIV	A	XXVI	A	XXV. XXIV	D	XXIV	F	XXII	B
6	25. XXV	F	XXIII	B	25. XXV	B	XXIII	E	XXIII	G	XXI	C
7	XXIV	G	XXII	C	XXIV	C	XXII	F	XXII	A	XX	D
8	XXIII	A	XXI	D	XXIII	D	XXI	G	XXI	B	XIX	E
9	XXII	B	XX	E	XXII	E	XX	A	XX	C	XVIII	F
10	XXI	C	XIX	F	XXI	F	XIX	B	XIX	D	XVII	G
11	XX	D	XVIII	G	XX	G	XVIII	C	XVIII	E	XVI	A
12	XIX	E	XVII	A	XIX	A	XVII	D	XVII	F	XV	B
13	XVIII	F	XVI	B	XVIII	B	XVI	E	XVI	G	XIV	C
14	XVII	G	XV	C	XVII	C	XV	F	XV	A	XIII	D
15	XVI	A	XIV	D	XVI	D	XIV	G	XIV	B	XII	E
16	XV	B	XIII	E	XV	E	XIII	A	XIII	C	XI	F
17	XIV	C	XII	F	XIV	F	XII	B	XII	D	X	G
18	XIII	D	XI	G	XIII	G	XI	C	XI	E	IX	A
19	XII	E	X	A	XI	A	X	D	X	F	VIII	B
20	XI	F	IX	B	XI	B	IX	E	IX	G	VII	C
21	X	G	VIII	C	X	C	VIII	F	VIII	A	VI	D
22	IX	A	VII	D	IX	D	VII	G	VII	B	V	E
23	VIII	B	VI	E	VIII	E	VI	A	VI	C	IV	F
24	VII	C	V	F	VII	F	V	B	V	D	III	G
25	VI	D	IV	G	VI	G	IV	C	IV	E	II	A
26	V	E	III	A	V	A	III	D	III	F	I	B
27	IV	F	II	B	IV	B	II	E	II	G	*	C
28	III	G	I	C	III	C	I	F	I	A	XXIX	D
29	II	A			II	D	*	G	*	B	XXVIII	E
30	I	B			I	E	XXIX	A	XXIX	C	XXVII	F
31	*	C			*	F		B	XXVIII	D		G

Julius.			August.			September.			October.			November.			December.		
G. M.	Epakten.	B. G.	Epakten.	B. G.		Epakten.	B. G.		Epakten.	B. G.		Epakten.	B. G.		Epakten.	B. G.	
1	XXVI	G	XXV. XXIV	C		XXIII	F		XXII	A		XXI	D		XX	F	
2	25. XXV	A	XXIII	D		XXII	G		XXI	B		XX	E		XIX	G	
3	XXIV	B	XXII	E		XXI	A		XX	C		XIX	F		XVIII	A	
4	XXIII	C	XXI	F		XX	B		XIX	D		XVIII	G		XVII	B	
5	XXII	D	XX	G		XIX	C		XVIII	E		XVII	A		XVI	C	
6	XXI	E	XIX	A		XVIII	D		XXII	F		XVI	B		XV	D	
7	XX	F	XVIII	B		XVII	E		XVI	G		XV	C		XIV	E	
8	XIX	G	XVII	C		XVI	F		XV	A		XIV	D		XIII	F	
9	XVIII	A	XVI	D		XV	G		XIV	B		XIII	E		XII	G	
10	XVII	B	XV	E		XIV	A		XIII	C		XII	F		XI	A	
11	XVI	C	XIV	F		XIII	B		XII	D		XI	G		X	B	
12	XV	D	XIII	G		XII	C		XI	E		X	A		IX	C	
13	XIV	E	XII	A		XI	D		X	F		IX	B		VIII	D	
14	XIII	F	XI	B		X	E		IX	G		VIII	C		VII	E	
15	XII	G	X	C		IX	F		VIII	A		VII	D		VI	G	
16	XI	A	IX	D		VIII	G		VII	B		VI	E		V	A	
17	X	B	VIII	E		VII	A		VI	C		V	F		IV	B	
18	IX	C	VII	F		VI	B		V	D		IV	G		III	C	
19	VIII	D	VI	G		V	C		IV	E		III	A		II	D	
20	VII	E	V	A		IV	D		III	F		II	B		I	E	
21	VI	F	IV	B		III	E		II	G		I	C		*	F	
22	V	G	III	C		II	F		I	A		*	A		XXIX	G	
23	IV	A	II	D		I	G		*	B		XXIX	B		XXVIII	A	
24	III	B	I	E		*	A		XXIX	C		XXVIII	C		XXVII	B	
25	II	C	*	F		XXIX	B		XXVIII	D		XXVII	D		XXVI	C	
26	I	D	XXIX	G		XXVIII	C		XXVII	E		25. XXVI	E		25. XXV	D	
27	*	E	XXVIII	A		XXVII	D		XXVI	F		XXV. XXIV	F		XXIV	E	
28	XXIX	F	XXVII	B		25. XXVI	E		XXV	G		XXIII	G		XXIII	F	
29	XXVIII	G	XXVI	C		XXV. XXIV	F		XXIV	A		XXII	A		XXII	G	
30	XXVII	A	XXV	D		XXIII	G		XXIII	B		XXI	B		XXI	A	
31	25. XXVI	B	XXIV	E					XXII	C					19. XX		

Da das Jahr der Geb. Chr. nach der gemeinen Rechnung das 2te des damaligen Mondcykels war; so findet man für ein gegebenes Jahr die entsprechende goldene Zahl, wenn man zur gegebenen Jahrzahl 1 addirt, und die Summe durch 19 dividirt. Der Rest aus der Division ist die goldene Zahl. So ist diese für 1811 ((1811 + 1): 19 =) 7. Bleibt kein Rest, so ist 19 die goldene Zahl.

Wäre der Mondcykel genau, so, daß nämlich nach 19 Julianischen Jahren die Neumonde genau wieder auf dieselben Tage des bürgerlichen Jahres fielen; so hätte die Bestimmung der Neu- und Vollmonde für jedes gegebene Jahr und eben dadurch die Bestimmung der Feyer des Osterfestes nicht die geringste Schwierigkeit. Man dürfte nur die goldenen Zahlen denjenigen Kalendertagen beyschreiben, auf welchen die Neumonde in den ersten 19 J. gefallen waren. Diese Methode hatte die Kirchenversammlung zu Nicäa zur leichten Berechnung der Vollmonde wirklich vorgeschrieben, indem sie zur Verhütung, daß nicht die Feyer des Osterfestes mit dem von den Juden am 14t. T. des Monats Nisan (dessen Vollmond auf den Tag der Nachtgleiche oder zunächst darnach fiel,) gefeyerten Pascha zusammentreffe, im J. 325 verordnet hatte, daß der Ostertag jedesmal an demjenigen Sonntage, der auf den 1sten Vollmond nach der Frühlingsnachtgleiche (Ostervollmond), oder zunächst auf den 21sten März (dem damaligen T. der Nachtgleiche) folgt, — oder, wenn dieser Vollmond auf

einen Sonntag falle, erst am nachfolgenden Sonntage gefeyert werden solle.

Diese Verbindung des unrichtigen Julian. Jahres mit dem nicht völlig genauen Mondcykel mußte nicht nur eine Verrückung der Nachtgleichen, sondern auch der Neu- und Vollmonde im Kalender verursachen. Beydes wurde, so klein auch die Fehler im Anfange waren, nach Verlauf einiger Jahrhunderte von den Gelehrten bemerkt. Daher wurde bey Entwerfung des Gregorianischen Kalenders jenes Beyschreiben der goldenen Zahlen aufgegeben, und, um doch die Zeitrechnung mit dem Mondwechsel zu verbinden, der Gebrauch der Epakten eingeführt.

Man versteht unter Epakten (epactae) die Zahlen, welche für ein jedes Jahr das Mondalter am Neujahrstage angeben, oder zeigen, um wie viel Tage der letzte Neumond vor dem Anfange des J. vorhergieng. So ist für 1811 die Epakte VI, weil der letzte Neumond des J. 1810 auf den 25ten Dec. fiel, daher beym Anfange des neuen J. das Mondalter 6 T. betrug. Fällt der Neumond auf den 1sten Jan. selbst; so bezeichnet man die Epakte, die dann o ist, mit *.

Die Reihe v. 19 J., nach deren Verlauf immer wieder dieselbe Ordnung der Epakten eintritt, heißt der Epaktencykel, welcher entweder der Julianische oder Gregorianische ist.

1). Der Julian. Epaktencykel ist nach den goldenen Zahlen dieser:

Gold. Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Epakte	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX

11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX oder 0.

Die Berechnung dieser Epaktenfolge beruht auf folgendem Grunde: Das astronomische Mondjahr (= 12 Mondmonaten = 354 T. 8 St. 48′ 36″) ist um 11 T. weniger 2 St. 48′ 36″ kleiner als das Julian. J. (= $365\frac{1}{4}$ T.). Weil nun 1 Mondmonat = $29\frac{1}{2}$ T.; so tritt nach einem gehabten Neumonde dieser wieder am 30ten T. ein. Weiß man also für ein Jahr den Tag, an welchem der Neumond eintrat, z. B. am 1sten Jan.; so fällt der 13te Neumond im nächsten J. 11 T. früher oder auf den 20ten Dec. des 1sten Jahres. Das Mondalter ist also am Neujahrstage des nächstfolgenden Jahres 11 T., und sein erster Neumond fällt auf den 20ten Jan. — Nach 12. $29\frac{1}{2}$ T. = 354 T. tritt der erste Neumond des nachfolgenden J. ein. Da er wieder um 11 T. früher fällt; so wird er nun auf den 9t. Jan. dieses folgenden J., oder um 22 T. früher, als im 1sten fallen. — Eben so würde der wieder 1 J. nachher eintretende Neumond 3. 11 = 33 T. früher, als im 1sten J. oder 33 T. vor dem 1sten Jan. des drittfolgenden J. eintreten; weil aber jedesmal nach $29\frac{1}{2}$ T. der Neumond wieder sich ereignet; so folgt, daß auch 3 T. vor dem 1sten Jan. dieses Jahres der Neumond eintreten,

oder am 1sten Jan. dieses drittfolgenden J. schon 3 T. alt seyn müsse; u. s. w.

Fängt man nun mit dem Jahre an, in welchem der Neumond am 1sten Jan. eintrat, welches das 2te J. vor der christl. Aere war; so ist im Anfange des 1sten J. oder 1 J. vor C. G. das Mondalter XI; im Anfange des 2t. J., oder im Anfange unserer Zeitrechnung XXII; am Anf. des 3ten III u. s. w. wie in der Tabelle. Am Anfange des 20ten Jahres wäre demnach das Mondalter XXIX + XI, oder o + XI, d. i. wieder XI, wie am Anfange der 19jährigen Periode, so, daß sich nun dieselben Zahlen wiederholen.

Allein bey diesem Epaktencykel hat man, da man volle 11 T. voraussetzte, um welche das Julian. J. das Mondjahr übertreffe, 19. (2 St. 48′ 36″) = 2 T. 5. St. 23′ 24″ zuviel gerechnet; dagegen hat man, so oft das Mondalter 33 — 29½ = 3½ T. war, nur III als Epakte gesetzt: derselbe Fehler wurde begangen, so oft das Mondalter über 29½ T. betrug; er wiederholte sich demnach in der Tafel für 19 J. 7mal. Man hat sohin 7. ½ = 3½ T. zu wenig gerechnet, folglich in Ansehung beyder Fehler nur noch 1 T. 6 St. 36′ 36″ zu viel in Abzug gebracht. Dieses macht in 310 J. 1 Tag; nach deren Ablauf man also jede Epakte um 1 T. vergrößern muß. Diese Abänderung durch Vergrößerung nennt man die Mondgleichung.

So

So oft ferner wegen des fehlerhaften Jul. Jahres am Ende eines Jahrhunderts nach der Gregorianischen Einrichtung ein Schalttag wegbleiben muß; so müssen auch die Epakten wieder um 1 T. vermindert werden; welche Abänderung man die Sonnengleichung nennt. Müssen beyde Aenderungen für ein Jahr, wie für 1800 angewendet werden; so heben sie sich einander auf.

2). Der Gregorian. Epaktencykel findet sich aus dem Julianischen sehr leicht, indem man nur bemerkt, daß nach dem Gregor. Kalender v. 1582—1700 10 T. und v. 1700 — 1800 11 T. aus dem Julianischen weggestrichen wurden. Daher darf man nur die Jul Epakte durchaus um 11 verkleinern, um den Gregor. Epaktencykel für alle Jahre v. 1700 — 1800 zu haben. Da ferner die Jul. Zeitrechnung 45 J. v. C. G. anfieng, und die Epakten jedesmal nach 310 J. um 1 T. vergrößert werden müssen, diese Vergrößerung folglich auch für das Säkularjahr von 1800 — 1900 statt fände, aber d. J. 1800, welches nach dem Jul. Kal. ein Schaltjahr war, wegen der Gregor. Verbesserung nur ein gemeines J. ist, folglich 12 T. weggelassen werden müssen; so folgt daß der Gregor. Epaktencykel für 1700 — 1800 auch gelte für 1800—1900. Dieser Cykel ist:

Gold. Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Epakten	*	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	

Man

Man kann übrigens die Epakte auch so finden: man ziehe von der goldenen Zahl des gegebenen Jahres 1 ab, multiplizire den Rest mit 11, und dividire das Produkt durch 30; so zeigt der Rest aus der Divis. die Epakte des gegebenen J. an.

Die Taf. IV, welche am Ende des Buches beygefügt ist, enthält den immerwährenden Gregorianischen Kalender. Seine Einrichtung ist folgende: Man schreibt die Zahlen von XXX bis I in umgekehrter Ordnung neben die Tage des Jahres, so, daß der 1ste Jan.*, der 2t. XXIX neben sich hat, und nach durchlauffenen Epakten die Reihe von vorne angefangen wird. Weil aber der synodische Mondmonat nicht ganz = 30, doch größer 29 T. ist; so giebt man wechselweise dem 1sten Mondmonate 30, dem 2ten 29 T. u. s. w., und bewerkstelligt dieß im ewigen Kalender dadurch, daß man bey dem 2t., 4t., 6. . . . Mondwechsel die Zahlen XXV, XXIV neben einerley Tag schreibt, wodurch dann diese Reihe von Tagen von 30 auf 29 herabgesetzt wird. Diese Bezeichnung hat an 6 Stellen statt. Weil aber in 19 J. keine 2 Neumonde auf demselben Tage eintreffen können, so schreibt man 25 neben XXVI, welche Epakte sich nicht in denjenigen Jahrhunderten findet, wo sich XXV, XXIV zusammen finden.

Der Gebrauch dieser beygeschriebenen Zahlen ist: daraus, daß gewisse Tage verschiedener Monate dieselbe

für

für ein gegebenes Jahr gültige Epakte beygeschrieben haben, erkennt man, daß auf diese Tage die Neumonde fallen. Ist diese Jahrsepakte z. B. I; so fällt der Neumond in jenem J. auf den 30ten Jan., den 28t. Febr., den 30ten März u. s. f.

Diese Art, die kirchlichen Neumonde, und hiedurch auch den Tag der Feyer des Osterfestes zu finden, ist allerdings leicht. Allein Genauigkeit ist nur durch astronomische Bestimmung möglich.

2). Der Sonnen- oder Sonntagsbuchstaben-cykel.

§. 71. Der Sonnencykel ist die Reihe von 28 Jahren, nach welchen die Sonntage, also auch alle übrigen Wochentage wieder in eben derselben Ordnung auf dieselben Monatstage fallen. Man bezeichnet nämlich die 7 Wochentage mit A, B, C, ... G, so, daß der 1ste Jan. allzeit A, der zweyte B ... erhält. Im immerwährenden Kalender ist dieser Cykel mit dem Epaktencykel auf diese Art verbunden: Man schreibt auf die genannte Weise zu allen Tagen des Jahres diese Buchstaben in derselben immer wiederkehrenden Ordnung. Der Buchstabe, welcher dann auf die Sonntage des Jahres trifft, heißt dessen Sonntagsbuchstabe. Der letzte Dec. erhält demnach wieder A. War also B der Sonntagsbuchstabe des Jahres, so, daß folglich A bey den Sonnabenden stand; so ist der letzte Dec. abermals ein

Sonn-

Sonnabend; das folgende Jahr fängt mit einem Sonntage an, und da beym 1sten Jan. wieder A steht, so ist A sein Sonntagsbuchstabe. Daraus erhellt, daß der Sonntagsb. von jedem gemeinen J. zum folgenden gemeinen um 1 Stelle, z. B. von B auf A, von A auf G, von G auf F u. s. w., aber im Schaltjahre um 2 Stellen zurücketrete. Für ein gemeines Jahr nämlich bleibt für alle Sonntage derselbe Sonntagsbuchstabe. Aber bey einem Schaltjahre giebt man dem 23t. u. 24t. Febr. denselben Buchstaben, so, daß sich also nun der Sonntagsb. ändert. Die Bezeichnung ist durch 2 Buchstaben z. B. CB, um anzuzeigen, daß C vor der Aenderung, B aber nach derselben als Sonntagsbuchstabe des gegebenen Schaltj. gelte.

Da endlich nach 7, 14, 21 . . . oder überhaupt nach einer jeden durch 7 meßbaren Zahl von Jahren die Buchstaben immer wieder dieselben Wochentage bezeichnen würden, wenn dazwischen keine Schaltjahre fielen; so ist klar, daß nach verflossenen 7 Schaltjahren die durch sie entstandenen Aenderungen rücksichtlich der den Wochentagen beygeschriebenen Buchstaben wieder aufgehoben werden müssen, daß demnach jedesmal nach $4.7 = 28$ J. wieder dieselbe Buchstabenreihe, wie in den vorhergehenden 28 J., für die Wochentage, mithin auch für die Sonntage eintrete.

1). Den Julianischen Sonntags- oder Sonnencykel findet man auf folgende Weise: Da auf des Abtes Dy-

Dyonisius Vorschlag im J. 532 die christl. Aere eingeführt und der Anfang des Sonnencykels 9 J. vor C. G. angenommen, folglich das 1ste J. unserer Zeitrechnung (das 44ste der Jul. Zeitrechnung) als das 10te des Sonnencykels festgesetzt wurde, welches sich mit einem Sonnabende anfieng; so mußte das 11te J. des Sonnencykels mit einem Sonntage anfangen, oder A der Sonntagsbuchstabe des 11ten J. im ersten Sonnencykel seyn.

Weil nun der Sonntagsbuchstabe, wie schon bemerkt wurde, in jedem gemeinen Jahre, welches auf ein gemeines folgt, um 1 T., in einem Schaltjahre aber, welches in unserem Falle 2 J. vor dem 11ten J. des Sonnencykels vorhergieng, um 2 T. zurücktritt; so ist folgendes der Julian. Sonnencykel:

für 10t. J.		für 11t. J.					
9	DC	12.	G	6.	G	2.	E	15.	C
8	E	13.	FE	5.	BA	1.	GF	16.	B
7	F	14.	D	4.	C			17.	AG
				3.	D			18.	F

aber

19.	E	23.	G	27.	B
20.	D	24.	F	28.	A.
21.	CB	25.	ED		
22.	A	26.	C		

Die allgemeine Methode, um zu finden, das wievielste im Jul. Sonnencykel irgend ein gegebenes J. sey, ist: weil das 1ste J. der christl. Zeitr. schon das 10te im Jul. Sonnencykel ist; so addirt man 9 zur gegebenen Jahrzahl, und dividirt die Summe mit 28; der Quotus zeigt dann die Anzahl der bis zum gegebenen J. verflossenen

senen Jul. Sonnencykel, der Rest aber zeigt, das wievielste Jahr das gegebene in dem noch nicht vollendeten Sonnencykel sey. Bleibt kein Rest; so ist das gegebene J. das 28te oder letzte in diesem Sonnencykel. Z. B. für 1810 ist $\frac{1810+9}{28} = 64$ mit dem Reste 27, d. i. dieses J. ist das 27te im 65ten Jul. Sonnencykel, welcher also mit 1811 zu Ende geht.

2). Der Gregor. Kalender datirt sich v. J. 1582, welches, da $\frac{1582+9}{28} = 56$ mit dem Reste 23, das 23te im 57t. Jul. Sonnencykel ist, folglich den Sonntagsbuchstaben G hatte. Da nun 10 T., d. i. eine ganze Reihe von 7 und noch 3 T. darüber aus dem Octob. weggelassen wurden; so mußte der Sonntagsbuchstabe um 3 Stellen, d. i. von G bis C weiter rücken. Im J. 1700 rückte er wegen der Weglassung des Schalttages noch um die 4te Stelle, also von G—D fort, und im J. 1800 rückte er wegen abermaliger Weglassung des Schalttages um 5 Stellen fort, so, daß der Gregorian. Sonnencykel für 1800 — 1900, welcher mit ED anfängt, folgender ist:

1.	ED	5.	GF	9.	BA	13.	DC	17.	FE
2.	C	6.	E	10.	G	14.	B	18.	D
3.	B	7.	D	11.	F	15.	A	19.	C
4.	A	8.	C	12.	E	16.	G	20.	B
21.	AG	25.	CB						
22.	F	26.	A						
23.	E	27.	G						
24.	D	28.	F.						

Weiß man durch die vorhin angeführte Division den Rest z. B. 0 für 1811; so weiß man auch aus dieser Tafel, daß, weil diesem Jahre die Zahl 28 entspricht, der erste Sonntag dieses J. auf denjenigen Tag, welcher F beygeschrieben hat, nämlich den 6ten Jan., daß mithin die folgenden Sonntage am 13ten, 27ten Jan. u. s. w. eintreffen, wie aus dem immerwährenden Kalender deutlich zu sehen.

Man kann sich dieser Tafel auch zur Lösung der Aufgabe bedienen: wenn das Jahr und der Monatstag gegeben ist, an welchem irgend eine Begebenheit, z. B. der am 26ten Dec. 1805 geschlossene Presburger Friede, vorfiel; den Namen des zugehörigen Wochentages zu finden. Man sucht nämlich die Zahl des Sonnencykels, welche in unserem Falle 22 ist. Dieser Zahl entspricht der Sonntagsb. F. Nun hat nach dem immerwährenden Kalender der 3te Dec. auch den Sonntagsb. F; dieser war also ein Sonntag, also der 5te Dec. ein Dienstag.

Um den Tag der Feyer des Osterfestes zu bestimmen, hat man gemäß der Verordnung der Nicäischen Kirchenversammlung (§. 70.) den Tag, an welchem der Ostervollmond eintritt, die Ostergrenze genannt, und diese Gregorianische Ostergrenze durch folgende Tafel, wo A. und M. April und März bezeichnen, nach den goldenen Zahlen dargestellt:

1.	13	A.	E	6.	18	A.	C	11.	24	M.	F	16.	29	M. D
2.	2	A.	A	7.	7	A	F	12.	12	A.	D	17.	17	A. B
3.	22	M.	D	8.	27	M.	B	13.	1	A.	G	18.	6	A. E
4.	10	A.	B	9.	15	A.	G	14.	21	M.	C	19.	26	M. A
5.	30	M.	E	10.	4	A.	C	15.	9	A.	A			

Sollte man nun für irgend ein Jahr z. B. 1810 den Tag des Osterfestes bestimmen; so suchte man für dieses Jahr die zugehörige goldene Zahl, welche 6 ist, indem $\frac{1810 + 1}{19} = 95$ mit dem Reste 6, d. i. das Osterfest für 1810 fällt ins 6te J. des 96sten Mondcykels. Man suche ferner den Sonntagsbuchstaben aus $\frac{1810 + 9}{28} = 64$ mit dem Reste 27; es fällt also das Osterfest auch in das 27 J. des 65 Sonnencykels; dieses Jahres Sonntagsb. ist G. Nun steht in der letzten Tafel neben der goldenen Zahl 6 der 18 April mit C, weil nun G der 4te Buchstabe nach C ist; so fällt also das Osterfest 4 T. nach dem 18t. Apr. oder auf den 22sten.

Ist einmal der Tag für das Osterfest in einem gegebenen J. bestimmt; so kann dieß auch leicht in Ansehung der beweglichen Feste geschehen, indem diese in einer bestimmten Entfernung von Ostern fallen.

Der Indiktionscykel und die Julianische Periode.

§. 72. Der Indiktionscykel (cyclus indictionum s. indictionis rom.) ist eine Reihe von 15 Jah-

Jahren oder 3 Lustra, nach welchen die von den römischen Kayfern auf 15 J. ausgeschriebenen Steuern wiederkehrten. Man findet die Indiktion im Reste, wenn man die um 3 vermehrte Jahrzahl durch 15 dividirt.

Das Produkt aus den 3 Cykeln 19, 18, 15 oder 7980 J. bildet die Julianische Periode, welche Joseph Scaliger zur Vereinfachung der Chronologie vorschlug.

Wenn man den Sonnencykel eines gegebenen Jahres h, den Mondcykel oder die goldene Zahl g und die Indiktion f weiß; so suche man den Rest der Division aus der von Jac. Bernoulli aufgestellten Formel

$$\frac{6910.\,f + 4200.\,g + 4845.\,h}{7980}$$

dieser Rest zeigt die Zahl des gegebenen J. in der Julianischen Periode. So findet man, daß das 1ste J. der christl. Aere, das im Sonnencykel das 10te, im Mondcykel das 2te, im Indiktionscykel das 4te war, in dieser Periodē das 4714te gewesen sey. Setzt man also zu einem gegebenen Jahr unserer Zeitr. noch 4713; so hat man die Jahrzahl in der Julian. Per. So ist dieses J. 1811 n. C. G. das 6514te dieser Periode. Oder wenn man die Jahrzahl vor C. G. von 4714 abzieht; so hat man die Jahrzahl der Julianischen Per. Der Julian. Kalender wurde z. B. 45 J. vor C. G. eingeführt, also im 4669sten J. dieser Periode.

So

So dient denn diese Periode zur allgemeinen Vergleichung aller Zeitrechnungen, deren Epochen man insgesammt auf die Jahre jener Periode bringt. So wurde z. B. nach Varro's Bestimmung Rom im 3961sten J. dieser Periode erbaut, und Constantin der Große war im 1059sten J. der Erb. R. zur Regierung gekommen; dieses war also das 3960 + 1059 = 5019st. der Julianischen Periode, d. i. das 5019 — 4713 = 306ste unserer Aere.

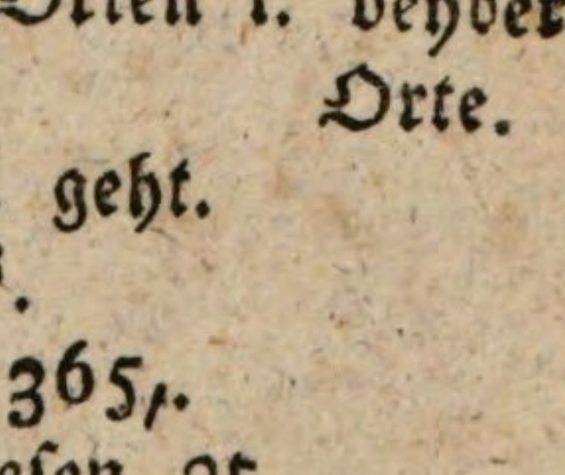
Druck:

Druckfehler I. in den Kegelschnitten.

Seite 7 Zeile 11 von oben statt AB lese BC.
— 10 — 14 — — nach Lothen l. von F aus.
— 12 — 6 von unten l. $MT = \surd(\ldots)$.
— 14 — 8 v. o. nach oder l. (§. 16.).
— 25 — 16 v. o. st. $\surd\left(\frac{a^2-ap}{a}\right)$ l. $\surd\left(\frac{\ldots}{4}\right)$.
— 38 — 5 v. o. st. RVR l. RVK.
— 40 — 7 v. u. st. $MD^2 + AC^2$ l. $MD^2 \times AC^2$.
— 46 — 12 — — nach Se l. parallel.
— 72 — 12 v. o. st. CL : CL l. CS : CL.
— 106 — 8 u. 10 v. o. ist vor zu tilgen.
— 110 — 11 v. u. st. $C\lambda$ l. $C\lambda^2$.

II. in der Astronomie.

Seite 7 Zeile 2 v. o. st. Aldeparan l. Aldebaran.
— 40 — 6 — — st. VS l. GS.
— 71 — 5 v. u. st. Gin l. hin.
— 124 — 3 v. o. st. L l. sin. L.
— 126 — 1 v. u. l. $MCl = \gamma$.
— 129 — 2 v. o. st. bey den Orten l. beyder Orte.
— 147 — 13 v. o. nach Zeit l. geht.
— 149 — 14 v. o. l. $\surd(9\frac{1}{2})^3$.
— 161 — 2 v. u. st. 365′ l. 365,.
— 163 u. folg. ist überal st. ^3t zu lesen 3t.
— 174 — 3 v. o. st. erster Abschn. l. einziger Abschnitt.
— 237 — 12 v. o. st. ⌉57 l. > d. i. größer 57.



Astronomie.

Fig: 1.

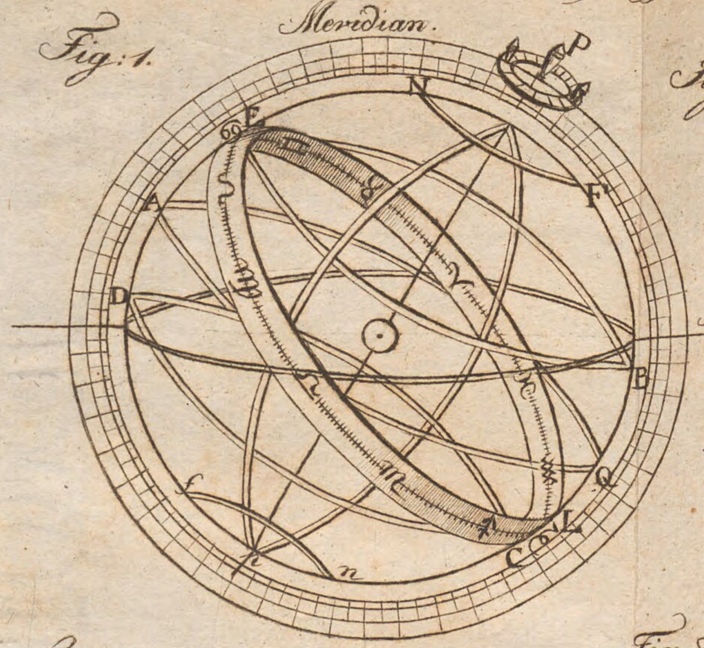


Fig: 2

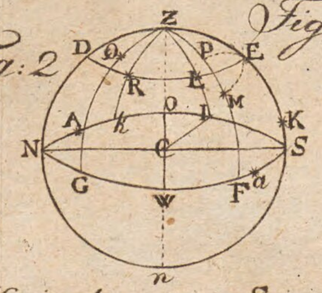


Fig: 3.

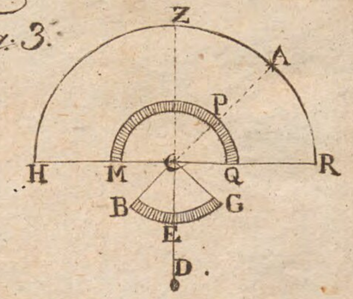


Fig: 4.

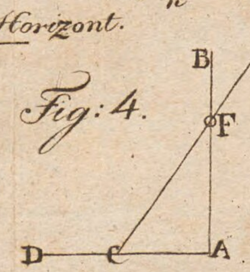


Fig: 5.

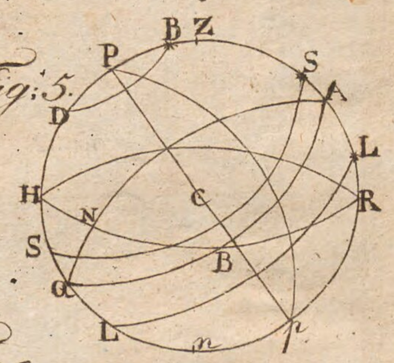


Fig: 6.

Fig: 7.

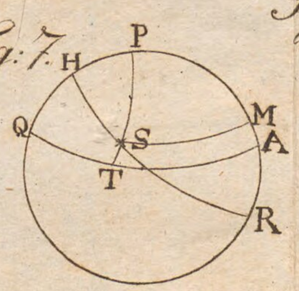


Fig 8

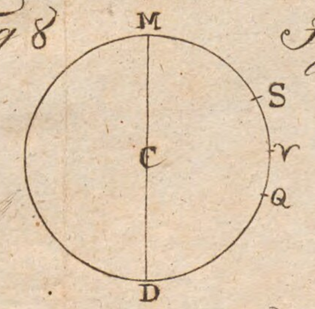


Fig 9.

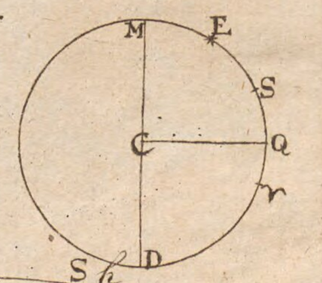


Fig: 10.

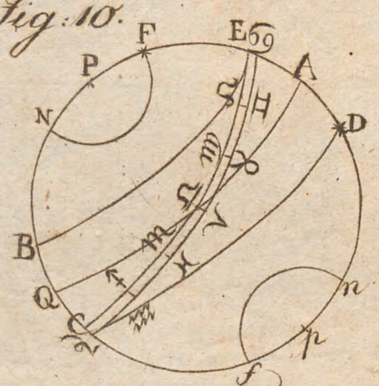


Fig: 11.

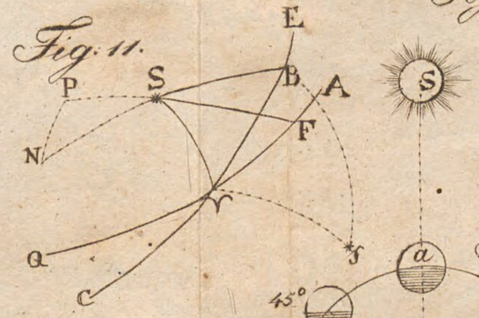


Fig: 13.

Fig: 17

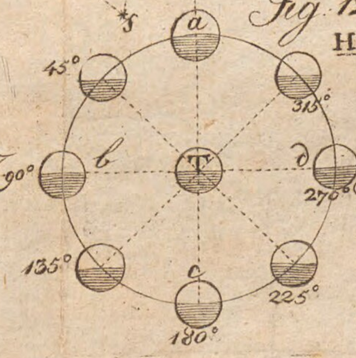


Fig 14.

Fig: 12.

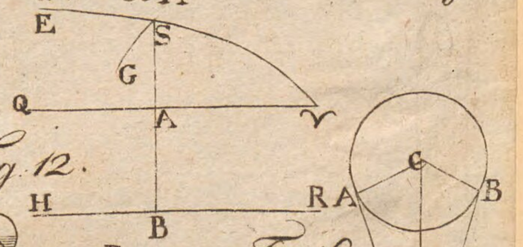


Fig: 16.

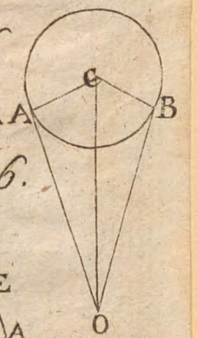


Fig 15.

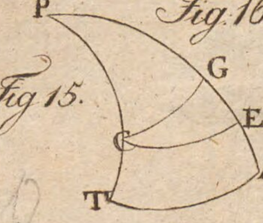


Fig: 9.

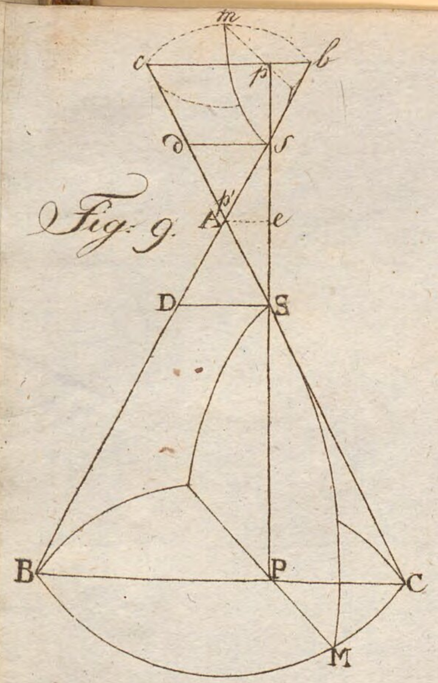


Fig: 10.

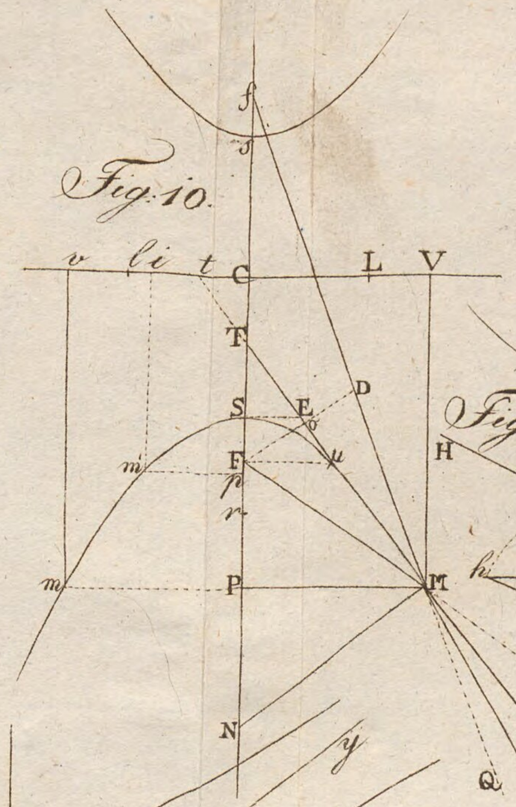


Fig: 11.

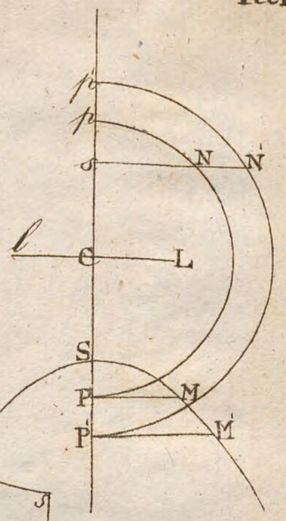


Fig: 13.

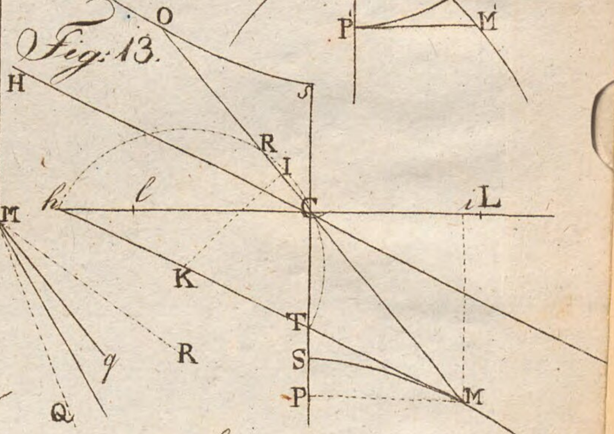


Fig: 12.

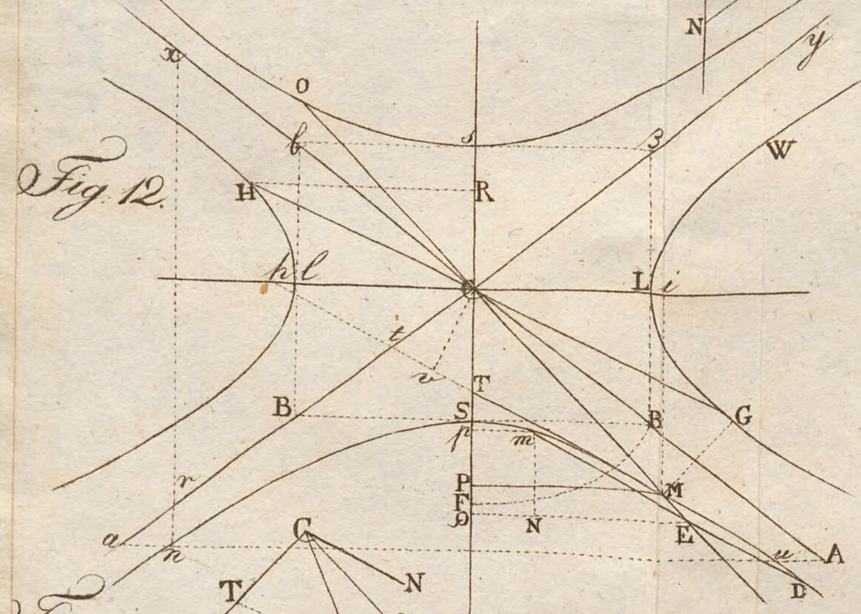


Fig: 14.

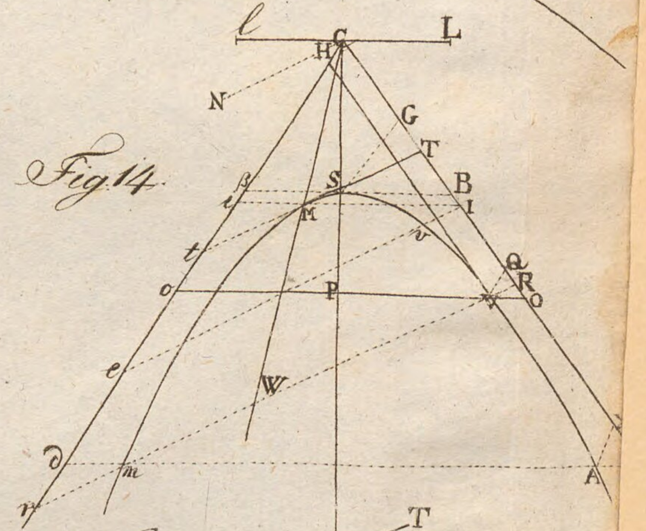


Fig: 15.

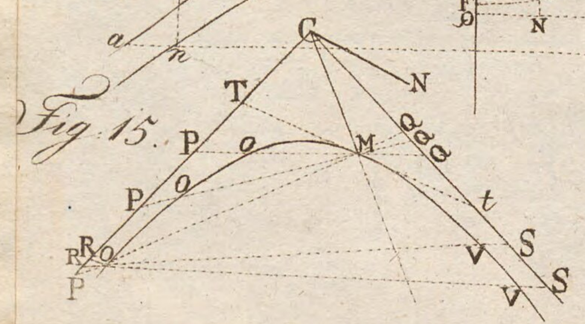


Fig: 16.

Fig. 17.

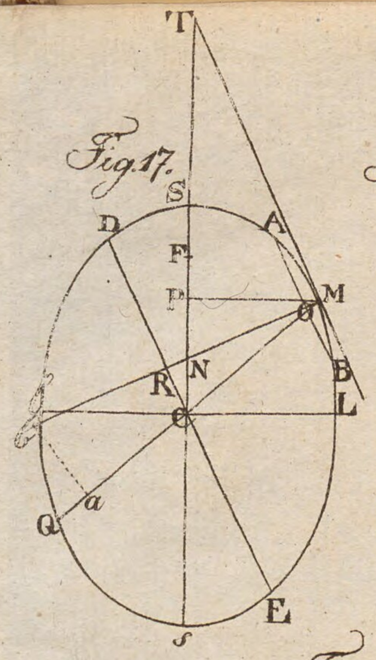


Fig 18.

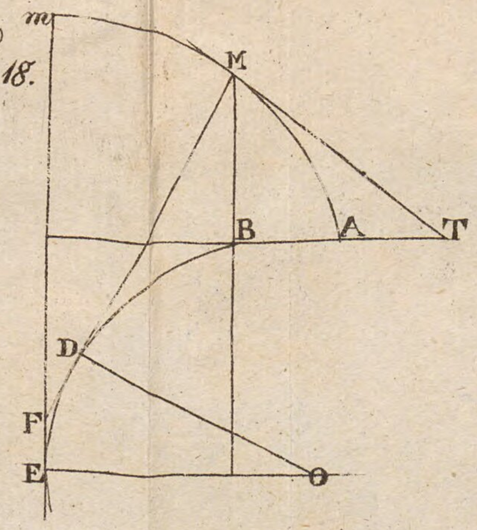


Fig 19.

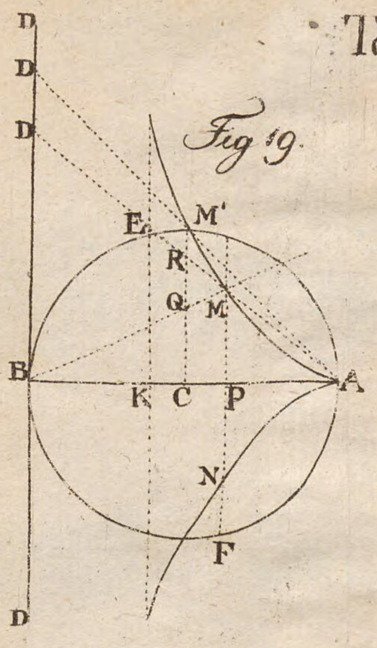


Fig 21.

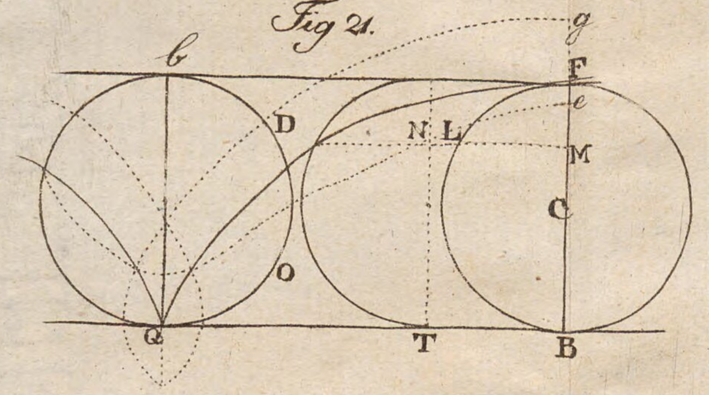


Fig 20.

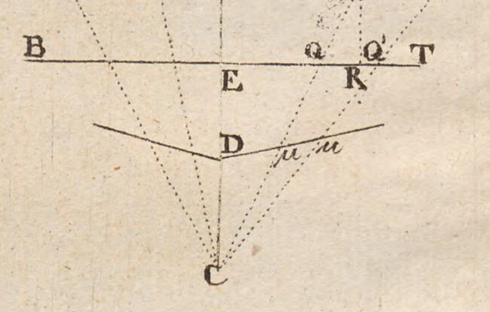


Fig. 22.

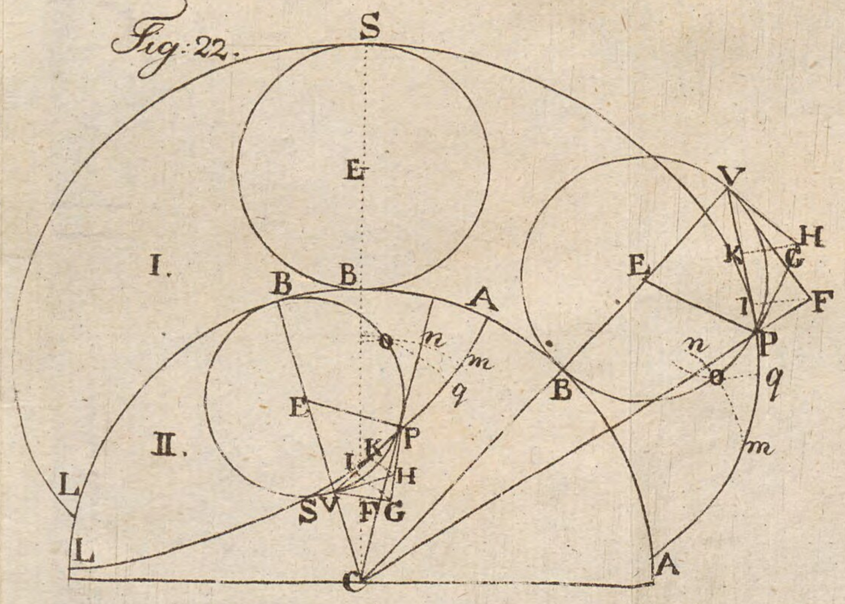
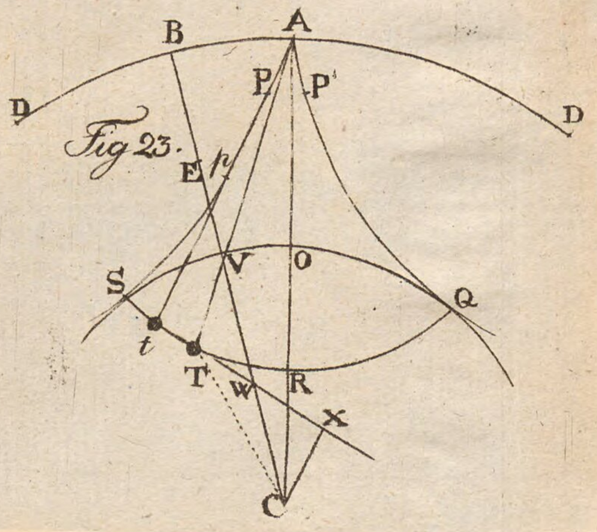


Fig 23.



Astronomie.

Fig. 18.

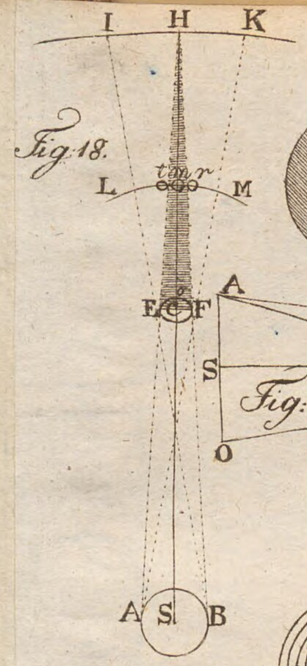


Fig. 19.

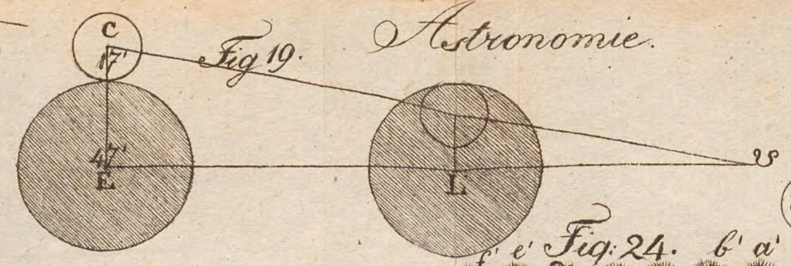


Fig. 23.

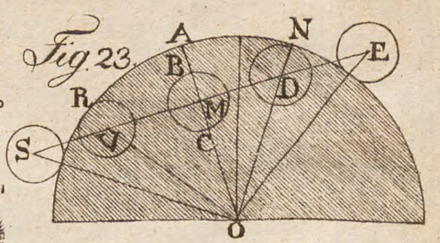


Fig. 24.

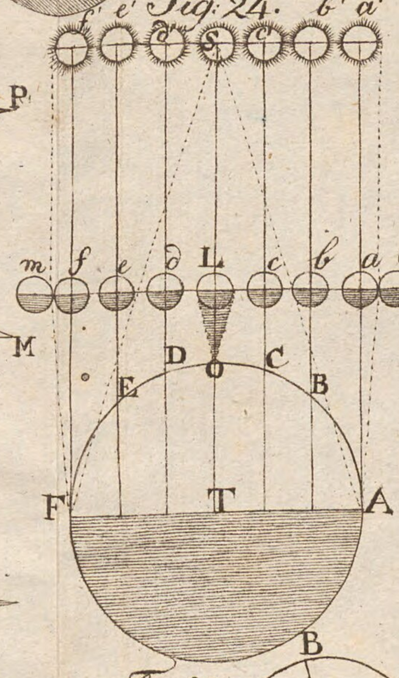


Fig. 29.

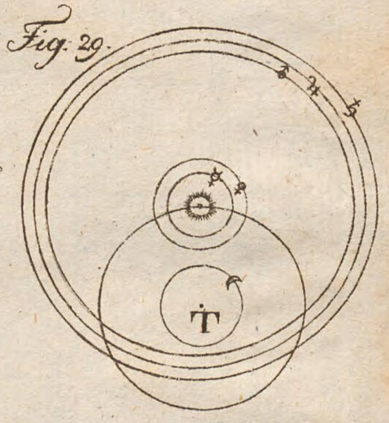


Fig. 25.

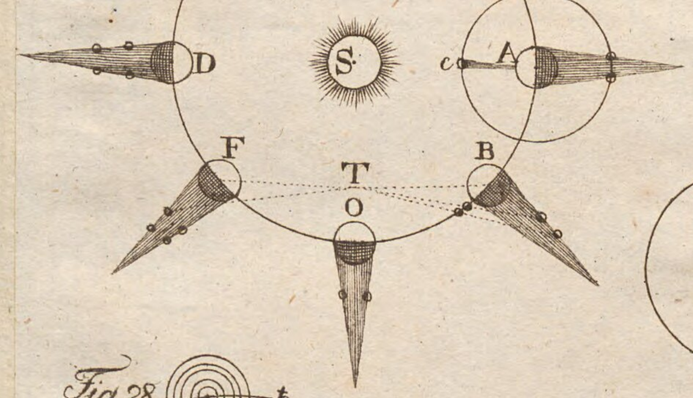


Fig. 22.

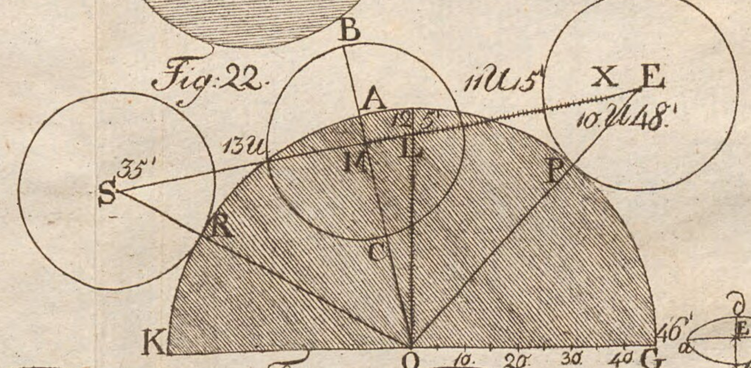


Fig. 28

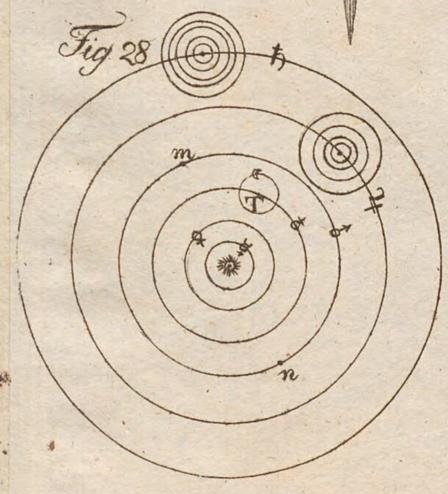


Fig. 26.

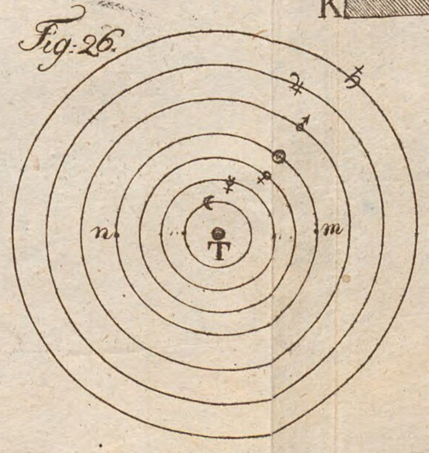


Fig. 27.

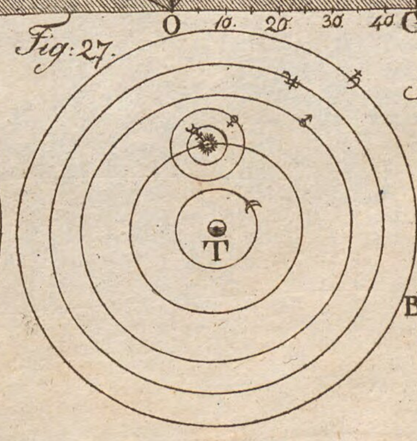
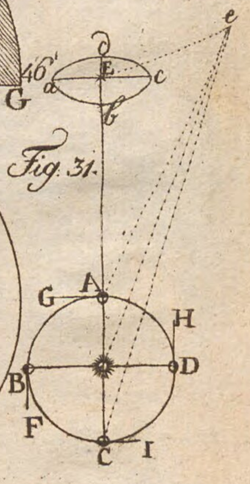


Fig. 31.



Astronomie.

Fig 30

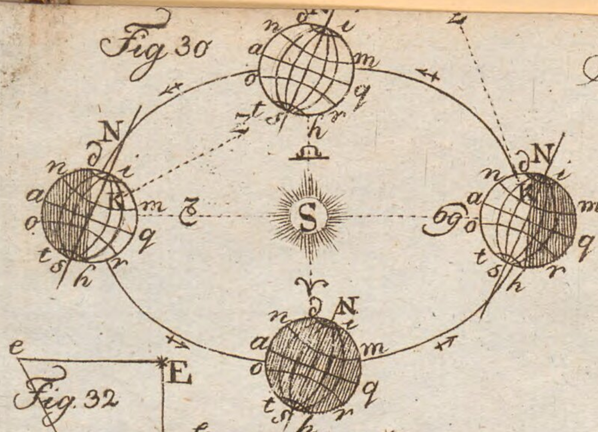


Fig. 32

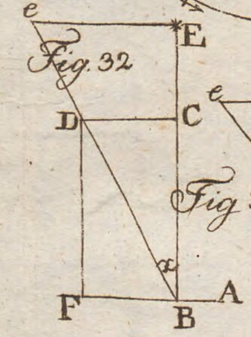


Fig. 33.

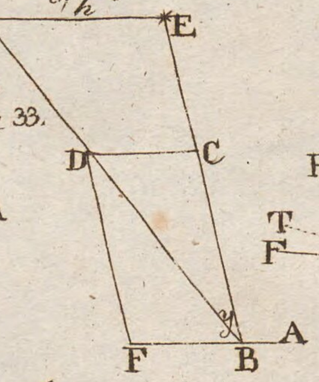


Fig 36.

Fig. 34

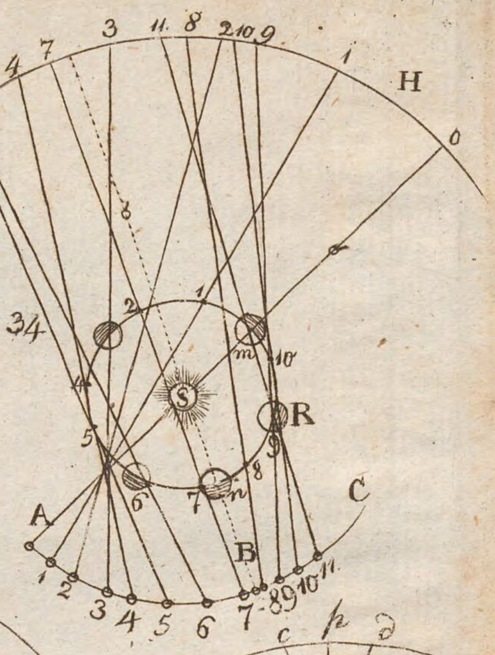


Fig 35

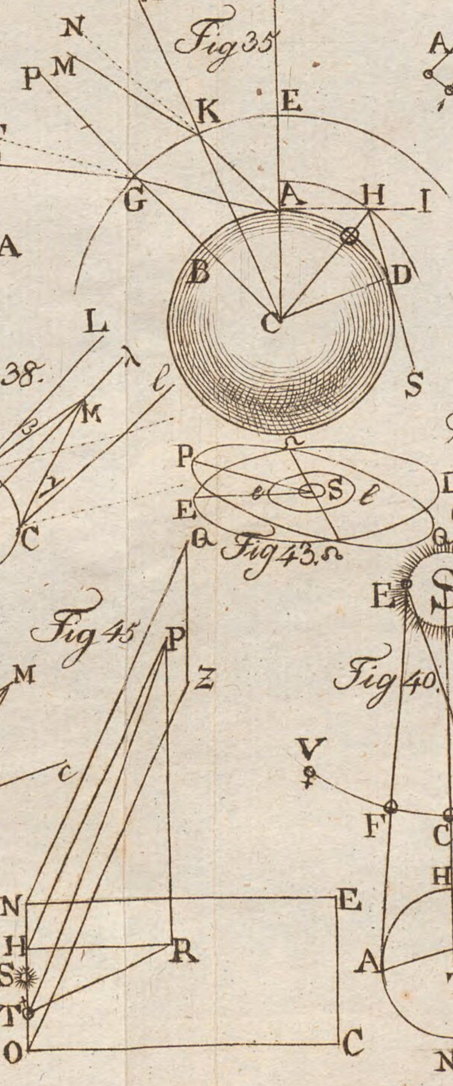


Fig 37

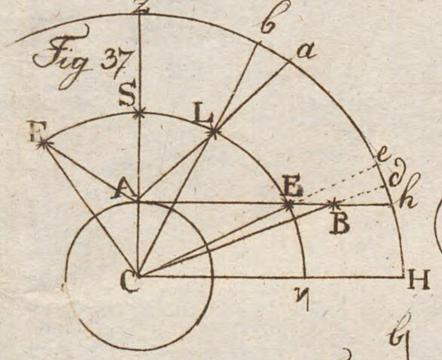


Fig 38.

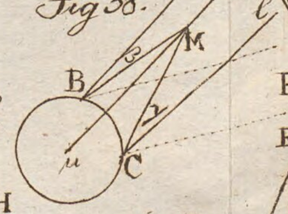


Fig 42

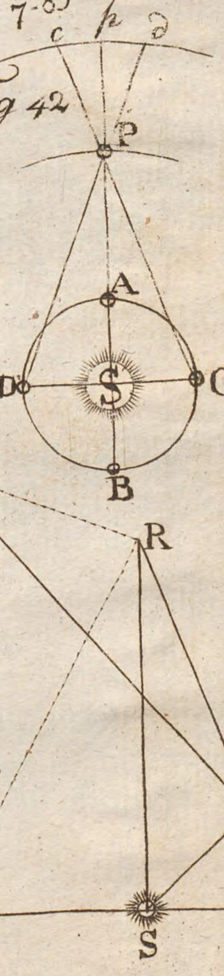


Fig 41.

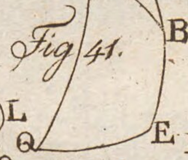


Fig 43.

Fig 44.

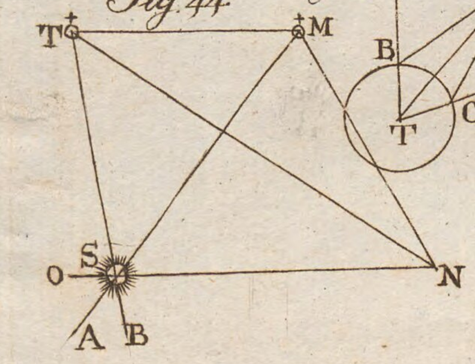


Fig 39

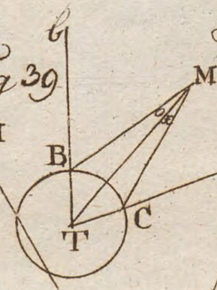


Fig 45

Fig 40.

Fig 46

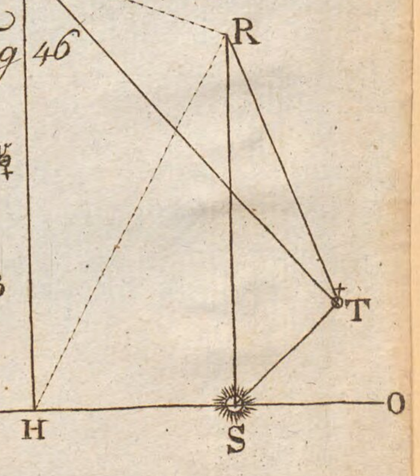


Fig. 47.

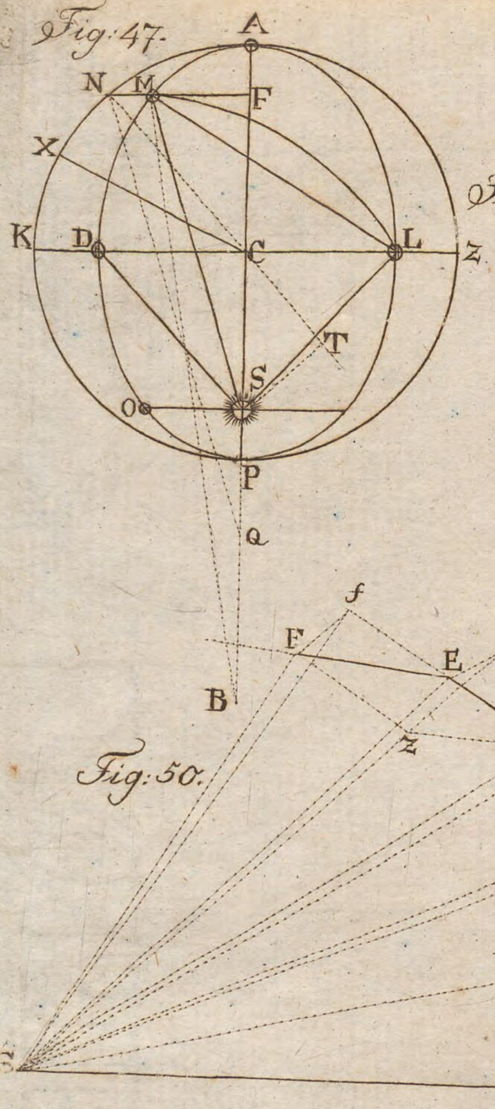


Fig. 48

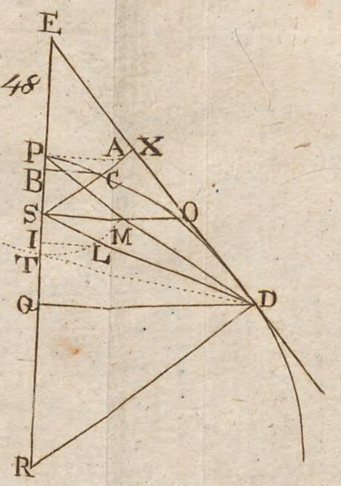


Fig. 49.

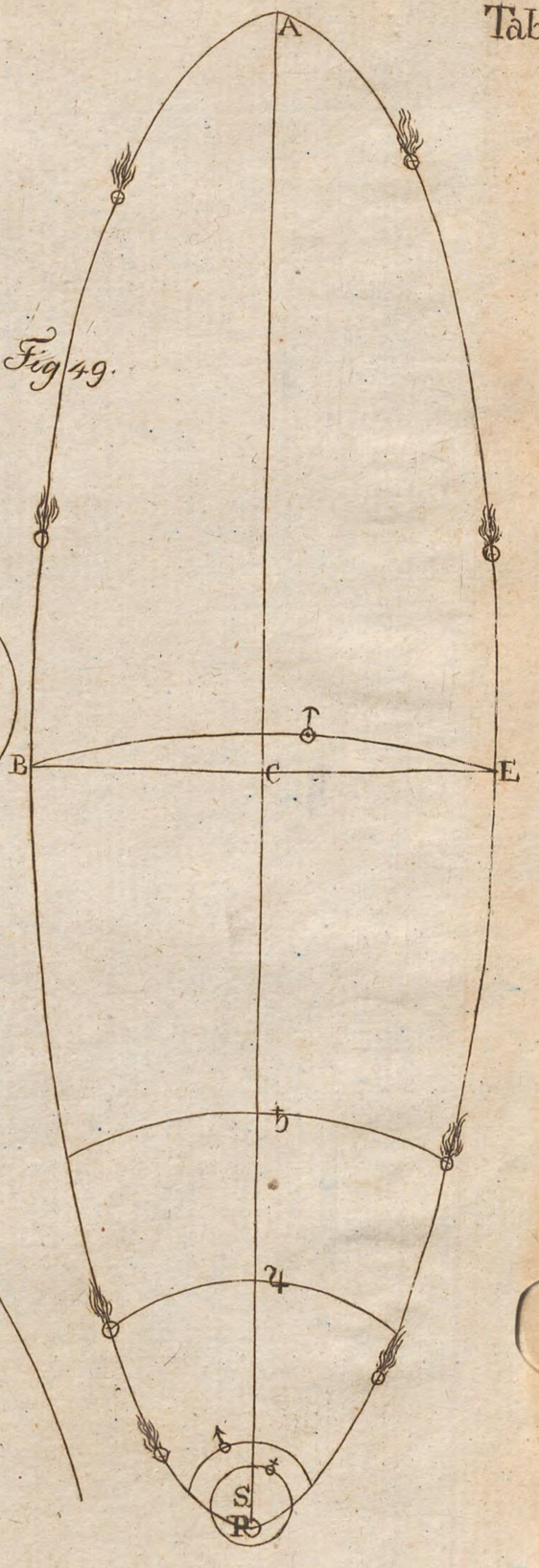


Fig. 50.

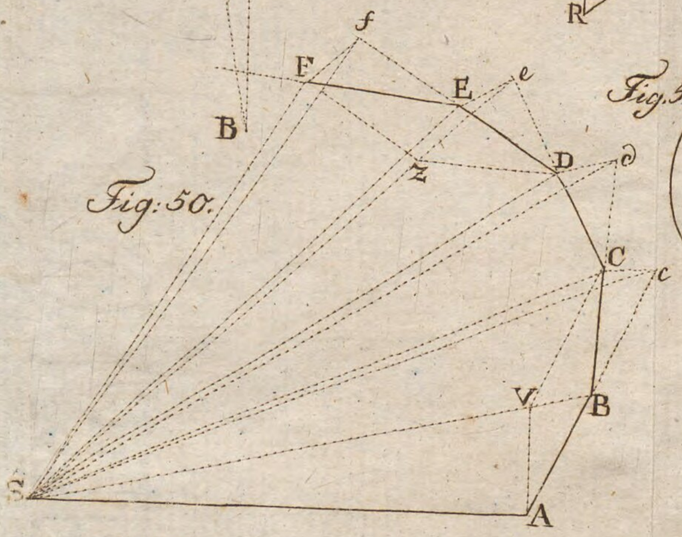


Fig. 52.

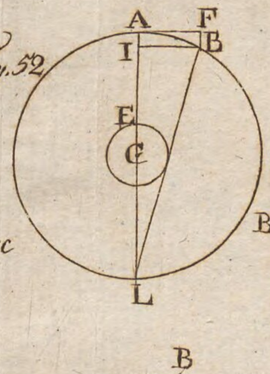


Fig. 53.

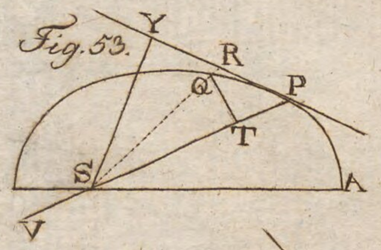


Fig. 54.

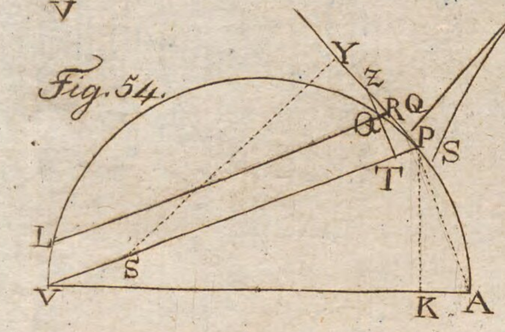


Fig. 51.

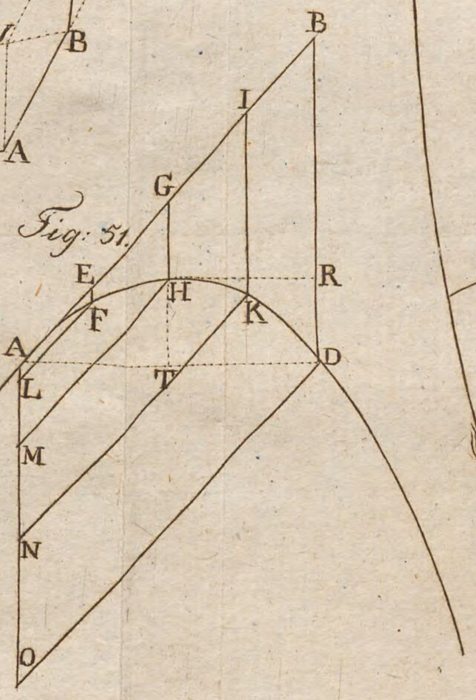


Fig: 55.

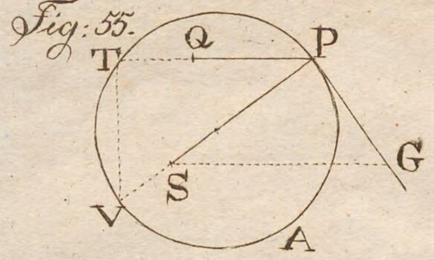


Fig 56.

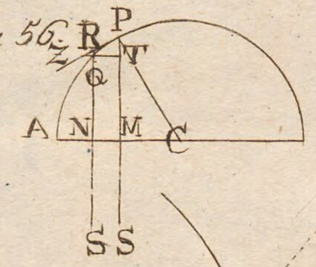


Fig: 58.

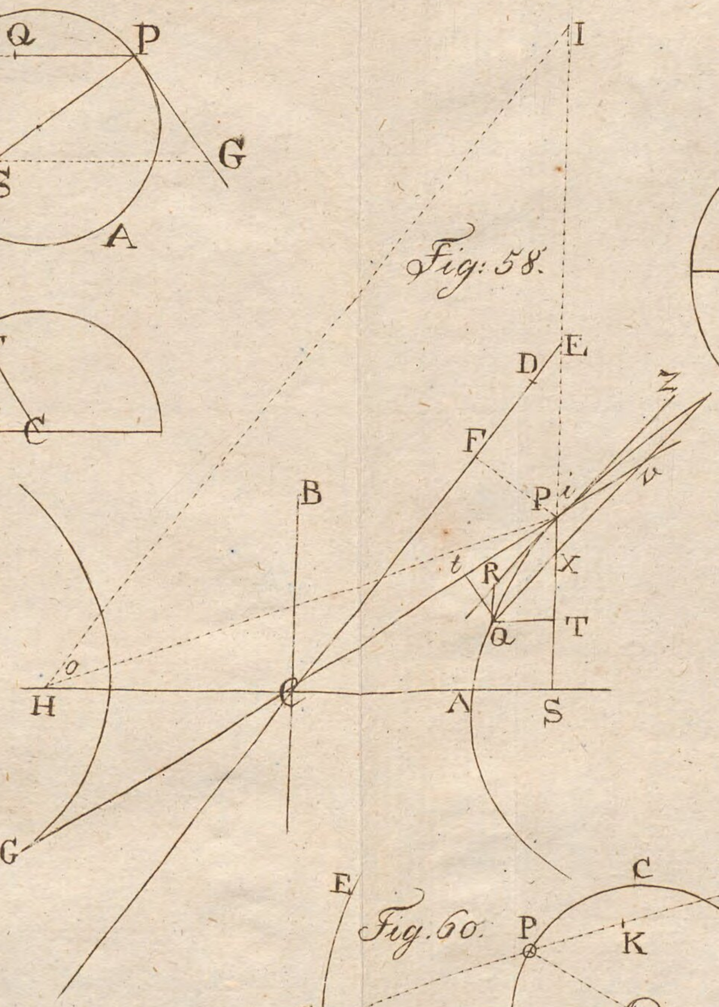


Fig. 57.

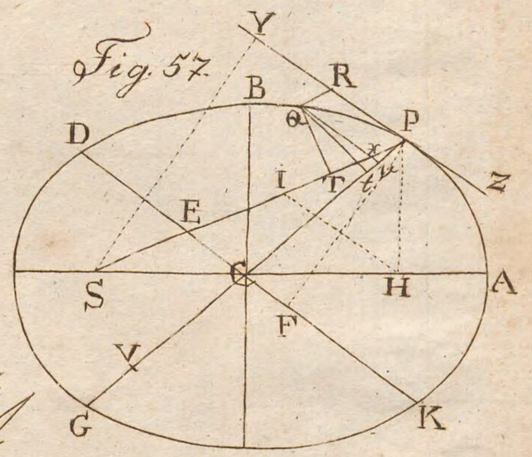


Fig. 59.

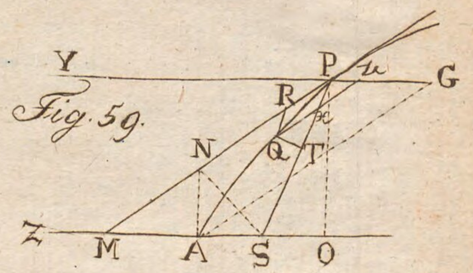


Fig. 60.

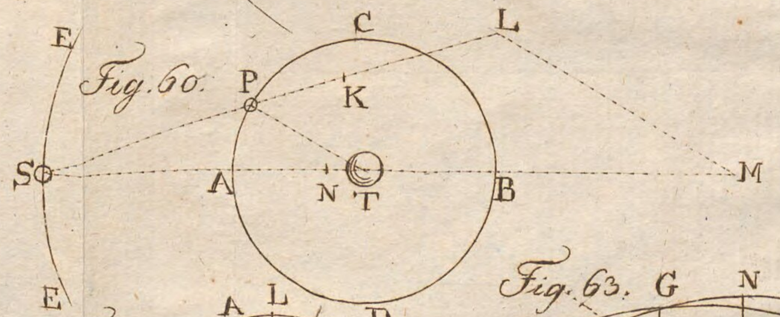


Fig. 61.

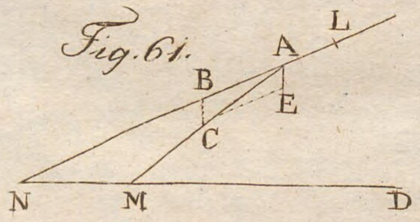
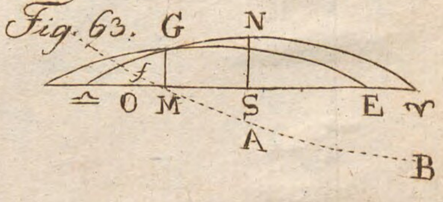


Fig. 62.

Fig. 63.



BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schön, Johann,

Grundriß der gesammten theoretischen Astronomie mit einem Anhange über den Kalender ; Nebst vorausgeschickter Theorie der Kegelschnitte und einiger Curven höherer Ordnung ; Zum Gebrauche der Vorlesungen

Nürnberg 1811

Astr.u. 182 n
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10061130-5